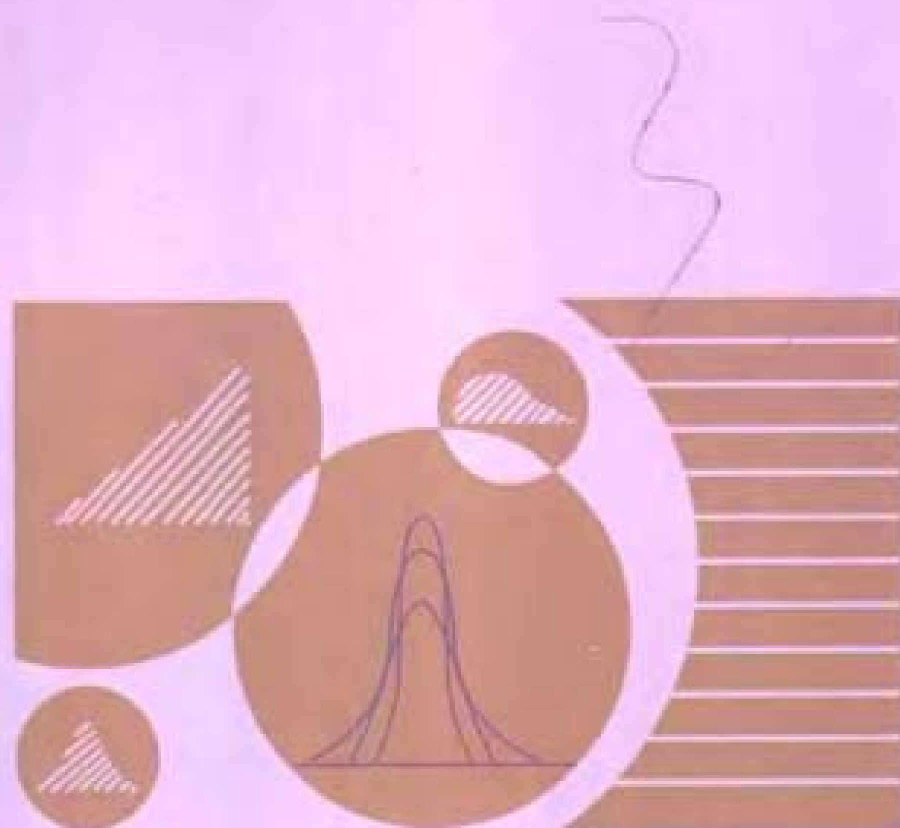
高等学校适用教材

误差理论与数据处理

（修订版）

梁晋文　陈林才　何　贡　编著



中国计量出版社

责任编辑：陈小林　封面设计：任　红



ISBN 7-5026-1512-1/TB · 621　定　价：18.00　元

高等学校适用教材

误差理论与数据处理

（修订版）

梁晋文　陈林才　何　贡　编著

中国计量出版社

图书在版编目(CIP)数据

误差理论与数据处理/梁晋文,陈林才,何贡编著.2版(修订本).—北京:中国计量出版社,2001.9

高等学校适用教材

ISBN 7-5026-1512-1

Ⅰ.误… Ⅱ.①梁…②陈…③何… Ⅲ.①误差理论-高等学校-教材 ②数据处理-高等学校-教材 Ⅳ.0241.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 044226 号

内 容 提 要

本书是由 1989 年版的《误差理论与数据处理》修订而成。原版是根据原"高等工业学校互换性与技术测量教材编审小组"拟订的大纲编写的,经"高等工业学校互换性与测量技术基础课程教学指导小组"同意,作为高等工业学校机械类各专业或仪器仪表专业试用教材。

本书共分 10 章,内容包括:计量学概述和误差的基本概念;等精度测量的随机误差;系统误差;粗大误差;非等精度测量;误差的合成与分配;测量结果的质量评定;最小二乘法和组合测量;实验结果的处理和经验公式;随机过程及其数据处理基础等。

本教材亦可供机械制造和仪器仪表制造的工程技术人员及计量、检验人员参考。

中国计量出版社出版

北京和平里西街甲 2 号

邮政编码 100013

电话(010)64275360

北京市迪鑫印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

787 mm×1092 mm 16 开本 印张 11 字数 261 千字

2001 年 8 月第 2 版 2001 年 8 月第 11 次印刷

*

印数 35 001—40 000 定价:18.00 元

前　　言

科学技术的发展与实验测量密切相关。在进行实验测量时,产生误差是不可避免的。因此,必须借助于误差理论,研究、估计和判断测量的数据和结果是否精确可靠,并采取正确的数据处理方法,以提高测量结果的精确程度。误差理论是我们认识客观规律的有力工具,是工程学科学生应该掌握的基础知识。

本教材是根据原"高等工业学校互换性与技术测量教材编审小组"拟定的大纲,主要为适应机械类专业30~40学时的教学需要,并考虑到工厂企业有关技术人员的需求而编写的。经"高等工业学校互换性与测量技术基础课程教学指导小组"同意,作为高等工业学校试用教材于1989年正式出版。

本书出版以来,先后共印刷10次。这次修订,内容有所增删。原第二章删除了实际应用很少的§2—4"简单运算误差",余下内容并入第一章;由于计算机应用的普及,第九章删去了原§9—6几种数据处理的计算机程序与实例;原第十一章"概率与矩阵的基础知识",是为当时社会上未学习过概率论和线性代数的读者阅读本书一至九章而准备的,这次修订决定全部删去。

考虑到测量不确定度的重要性及其概念与应用的日趋成熟,这次特增编了这方面的内容。

近年来,动态测量误差及其数据处理的研究与应用发展很快,内容也较多。经再三考虑,我们决定暂不增编这方面的内容。原因之一是这本教材主要是供30~40学时教学使用,现有内容已难于全部讲授,故不宜增大篇幅,增添新的内容;再则学习这些内容要求学生具备更多的预备知识(如信号分析与处理及相关的数学知识等),否则教学上将有很大难度。有的院校是将这方面新的内容另外开设选修课或讲座,这不失为一较好办法。

本书的其他章节,也作了全面审改,包括名词术语的规范统一和局部内容及文字的修改。

本书一至七章是最基本的内容,宜用较多学时讲透。第八、九两章是本书前七章的综合、扩展与总结,也是数据处理的基础,但内容较多,不必全部在课堂上讲授。建议对第八章只讲线性最小二乘法,至于非线性函数和组合测量的最小二乘法以及正态分布公式的证明等,可简略或不讲。对于第九章,建议只讲一元线性最小二乘法求经验公式和周期性经验公式。在课堂上不讲的内容并非不重要,作为科技工作者,应掌握这些基础知识。这些内容可留给学生自学。学生掌握最基本的原理后,一旦遇到这些问题再自学,不会感到困难。

第十章可根据不同专业的要求选讲。

本书初版由清华大学梁晋文教授、天津大学陈林才教授和河北工业大学何贡教授合作编写。由于梁晋文教授年事已高，修订版工作主要由何贡教授和陈林才教授共同完成。

初版主审天津大学蔡其恕教授曾对本书逐章仔细审阅，并提出许多宝贵的修改意见，对提高教材质量起了重要作用。蔡老前些年在90周岁时不幸病逝。我们谨对他表示深切谢意和怀念。

在编写本教材过程中，曾得到课程教学指导小组成员的帮助；得到中国计量出版社的支持；天津大学罗南星教授及当时的博士研究生刁红彦同志曾协助整编；北京理工大学林洪桦教授对第十章提出许多很好的意见。对这些帮助，我们在此表示衷心的感谢。

限于我们的水平，书中缺点错误在所难免，殷切希望读者批评指正。

编著者

2001年4月

目　　录

第一章 计量学概述和误差的基本概念

§1—1 计量学的内容与作用

一、计量学的内容

为实现测量单位的统一和被测量值准确可靠的一切活动，统称计量。计量学是一门研究测量、保证测量统一和准确的科学。计量学有时可简称计量，它涵盖有关测量的理论与实践的各个方面。研究内容包括计量单位及其基准与标准的建立、保存和使用；测量方法和计量器具；测量的准确度(精确度)；观测者进行测量的能力；计量法制和管理等。主要工作内容是：

(1) 建立计量单位及其基准、标准，基准和标准的复制、保存和传递(指基尺、基准砝码、基准频率、时间、波长等)。

(2) 采取措施保证国家内部和国际间计量量值的统一性。

(3) 拟定测量方法，设计计量器具，以便实施测量。

(4) 分析和估计测量结果的不确定度，并设法减小误差，提高其准确度。

上述第(4)项内容是本书所要讨论的中心内容。

二、计量学的作用

对自然科学而言，特别在技术科学和工程中，信息收集的主要含义就是测量(取得观测和实验的数据)。测量过程本身就是一种实验。各种物理量都需经过测试和计量才能得出结果。许多物理定理的发现，物理常数的确定，都是通过精密计量测试得出的。如：半导体的发现，自由落体定理的确定等均是如此。

通过计量可以进一步完善理论。如吴有训和康普顿研究了 X 射线频率和散射角的关系，通过对散射光角度改变及波长改变的测量，证实了以前理论分析的正确性，奠定了量子理论基础——光量子能量守恒和冲量守恒定律。这类例子充分说明：计量测试在科学上和认识客观世界中的重要意义和作用。

对于技术科学，计量尤为重要，它是发展技术和工业的必要条件，计量与测试永远是促进其进步的重要因素。测量的精度和效率，决定着科学技术和工业的水平。

现代机械工业的发展是建立在标准化与互换性的基础之上的。互换性的先决条件是零、部件必须具有一定的精度，而精度取决于制造水平，并由计量水平来确定。精度要求、制造水平和计量水平，三者是相互促进又相互制约的，其中计量是精密加工的基础，没有计量就不可能保证产品的精度。

任何计量测试，都不可避免有误差。因此，必须研究、估计和判断计量结果是否可靠，给出正确的评定。对于计量结果的分析、研究、判断，必须采用经过长期实践积累所形成的误差理论，它是我们认识客观世界的有力工具。在科学领域内，某些重大的发现，是运用误差理论直

接对测量结果分析研究而发现的。例如:在对海王星的运动轨迹的观测中,由观测数据发现它有小的、不规则的运动,因此引起人们的注意。最后,导致冥王星的发现。又如:由空气中获取的氮气,测得其密度与用其他化学方法产生氮气所测得的密度有明显差异,从而导致了惰性气体氩气的发现。

在中国古代的隋、唐、元、明朝时期,曾有过许多科学家和学者对误差理论和数据处理进行了研究,并做出了巨大贡献。例如:目前在数据处理中常采用的平滑曲线等间距内插法,是隋朝的刘焯(544～610 年)完成的;不等间距插值法,是唐朝的张遂(僧人,法号"一行",683～727 年)所创立的。他们建立这种算法的时间,要比牛顿早1 000年左右。

解放前,在历代反动政府的统治下,我国学者在这方面的贡献较少,即便有,也是在极端困难的条件下,或在国外利用外国的实验室研究出来的。如:原清华大学、北京大学的许宝禄教授关于概率论中的区间估计理论的完善(1941 年);黄子卿教授测定出在三相点的水蒸气压力标准;由王大珩教授设计的被称为卜尔夫利西折射率测量仪等。

解放后,随着国民经济的发展,计量工作有了很大的进步。近年来,由于我国科学技术和工农业生产的飞速发展,计量科学和误差理论与数据处理的研究也获得喜人的成果。我们深信:随着改革开放的深入发展,我国的计量科学事业,必将取得更大的成绩。

§1—2 关于测量的一些概念

一、测　　量

可以用数值来评价(表示)其物质特性(状态、运动等)的量,称之为物理量。如长度、温度、硬度、密度等。

测量是以确定被测对象的量值为目的的一组操作,即用实验方法,将物理量与作为单位量的某量值相比较,并求出其比值的过程。它可用下式表示:

$$L = qu \tag{1—1}$$

式中: L——被测量值;

u——测量单位;

q——单位的数目(值),或称比值。

例如:量出某工件长 $L=100$ mm,其中长为 L; mm 为其测量单位 u;100 为单位的数目 q(即长度 L 与长度单位 u 的比值)。

二、测量结果

由测量所得的赋予被测量的值叫做测量结果。显然,测量结果是由比值和测量单位两部分所组成。故测量结果多具有单位,如 L(长度)=100 mm,但也有某些物理量不含单位,如相对密度。完整确切地讲,测量结果还应包括测量不确定度,这在后边将要讲到。

三、测量方法

按测量结果获得的方法,或测量条件及测量结果的不同,测量方法可分为:直接测量与间接测量;直接比较测量与微差比较测量;等精度测量与非等精度测量;接触测量与非接触测量;

主动测量与被动测量;静态测量与动态测量等。而按实验数据的处理方式,测量方法主要是分为直接测量、间接测量与组合测量三类,现分述如下。

1. 直接测量

无需对待测的量与其它实测的量进行某种函数关系的计算,而直接得到被测量值的测量,称为直接测量。如用游标卡尺测量轴径;用立式光学计测量圆柱塞规直径对于作为标准尺寸的量块中心长度的偏差值,都属直接测量。

2. 间接测量

与直接测量不同,待测量 y 需先通过测量与其有某种函数关系的其他测量值 x(或 n 个测量值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$),然后通过其函数关系:

$$y = f(x)$$

或

$$y = f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

计算得出待测量 y,这种测量称为间接测量。

如用弦长弓高法测量圆弧或轴的直径 D(图 1—1),先测量一定的弦长 s 和相应的弓高 h,再按下式计算出直径 D:

$$D = \frac{s^2}{4h} + h \qquad (1—2)$$

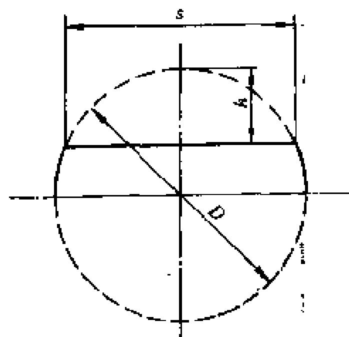


图 1—1

3. 组合测量

如有若干个待求量 $y_1,y_2,\cdots,y_t$,把这些待求量用不同方式组合起来进行测量,并把测得值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与待求量之间的函数关系列成方程组,即

$$\left.\begin{aligned} f_1(y_1,y_2,\cdots,y_t) - x_1 &= 0 \\ f_2(y_1,y_2,\cdots,y_t) - x_2 &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(y_1,y_2,\cdots,y_t) - x_n &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1—3)$$

方程式的数量 n 要大于待求量的个数 t,然后用最小二乘法求出各待求量的数值,即为组合测量(详见第八章)。

§1—3 单位制与基准(标准)

一、单 位 制

一般由一个数乘以测量单位所表示的特定量的大小,称为量值(如 5 m,12 kg,20 ℃等)。在科学的所有领域或某一领域中,一组彼此间存在确定关系的基本量和相应导出量的组合,称为量制。如计量测试中的几何量、力学量、电学量、…等等,都有自己的量制。

为给定量制按给定规则确定的一组基本单位和导出单位,称为单位制。我国采用的国际单位制(SI)是由国际计量大会采用和推荐的在全世界广泛应用的单位制。国际单位制单位由米(长度)、千克(质量)、秒(时间)、安〔培〕(电流)、开〔尔文〕(热力学温度)、摩〔尔〕(物质的量)、坎〔德拉〕(发光强度)等 7 个基本单位和弧度(平面角)、球面度(立体角)两个辅助单位以及它们的导出单位组成。

二、计量基准(标准)

为了定义、实现、保存或复现量的单位或一个或多个量值，用作参考的实物量具、测量仪器、参考物质或测量系统，称为计量基准(标准)，它包括实物基准(如“千克”原器)和自然基准(如“米”定义是光在真空中于1/299 792 458 s时间间隔内所行进的距离)。

国际计量基准是经国际协议承认的测量基准，在国际上作为对有关量的其他测量基(标)准定值的依据。

国家计量基准是经国家决定承认的测量基准，在一个国家内作为对有关量的其他测量基(标)准定值的依据。

用于日常校准或核查实物量具测量仪器或参考物质的测量标准，称为工作标准。工作标准还可根据需要，按不同的准确度分等分级。其准确度低于计量基准。

计量基准(标准)对保证全国和国际上的量值统一起着极为重要的作用。

术语计量基准与标准，使用中有时也无严格区分，在我国颁布的计量技术规范JJF1001—1998《通用计量术语及定义》中，已将计量基准、标准和测量标准作为同义词对待。一般情况下优先称标准。

§1—4　误差的概念

零件的加工和测量，以及所用的加工机床、测量仪器本身，都不可避免地存在误差，没有误差的加工和测量是不存在的。有些参数的计算及测量数据的处理，同样含有误差。误差和计量测试有密切关系，任何计量测试都有误差存在，而各种量值的大小，又都要通过计量测试才能给出。因此，下面着重讨论测量误差。

一、误差的含义

误差是评定精度的尺度，误差愈小表示精度愈高。在测量中，由误差表示测得值与真值之差。

若令测量误差为 δ，测量值为 x，真值为 x_0，则有

$$\delta = x - x_0 \tag{1—4}$$

或

$$x_0 = x - \delta$$

真值 x_0 是客观存在的，但在实际应用时，一般是不知道和无法确定的。在统计学上，当测量的次数 n 非常大时(趋于无穷大)，测得值的算术平均值(数学期望)才接近于真值。故常以测量次数足够大时的测得值的算术平均值，近似代替真值(详见第二章)；实用中还常用量值精度足够高的实物近似代替真值，这些都称之为约定真值。

二、误差的类型

按误差的性质和特点，误差可分为随机误差、系统误差和粗大误差三类。

1. 随机误差

在同一测量条件下，多次重复测量同一量值时，测量误差的绝对值和正负符号以不可预知的方式变化，这种误差叫做随机误差。例如千分表测杆与套管导轨在测量时因有间隙和摩擦

引起的示值不稳定的误差。

在我国新制订的国家计量技术规范 JJF1001—1998《通用计量术语及定义》中，参照并采用了 1993 年几个国际权威组织提出的新的随机误差定量定义；随机误差（$\delta_{随机}$）是测量结果 x_i 与在重复条件下，对同一被测量进行无限多次测量所得结果的平均值 $\bar{x}$ 之差。即

$$\delta_{随机} = x_i - \bar{x} \tag{1—5}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} (n \to \infty) \tag{1—6}$$

由于重复测量实际上只能进行有限次，所以实用中的随机误差只是一近似的估计值。

当测量次数足够多时，就整体而言，随机误差服从一定的统计分布规律（详见第二章）。

2. 系统误差

在同一测量条件下，多次重复测量同一量值时，测量误差的绝对值和正负符号都保持不变，或在测量条件改变时按一定规律变化的误差，叫做系统误差。前者为定值系统误差，后者为变值系统误差。

如用零位没有对准的游标卡尺或千分尺测量尺寸，将有零位系统误差。

在我国新制订的国家计量技术规范（JJF1001—1998《通用计量术语及定义》中，系统误差 $\delta_{系统}$ 的定量定义是：在重复性条件下，对同一被测量进行无限多次测量所得结果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ $(n \to \infty)$ 的平均值 $\bar{x}$ 与被测量的真值 x_0 之差。即

$$\delta_{系统} = \bar{x} - x_0 \tag{1—7}$$

式中 $\bar{x}$ 按式（1—6）计算。

由于定义中的测量是在重复性条件下进行的，测量条件不改变，故 $\delta_{系统}$ 是定值系统误差。

由于重复测量实际上只能进行有限次，另外，测量的真值也只能用约定真值代替，所以实际中的系统误差也只是一近似的估计值。

3. 粗大误差

这类误差的发生，是由于测量者的疏忽大意，或因环境条件的突然变化而引起的，误差值一般比较显著。对确认含有粗大误差的测量数据，应予以剔除（详见第四章）。

三、误差的表示方法

误差可用绝对误差和相对误差两种基本方式来表示。

1. 绝对误差

绝对误差就是前面讲的某量值的测得值与真值（或约定真值）之差，一般所说的误差，就是绝对误差。

由于实际测得值可能大于或小于被测量值的真值，故绝对误差可以为正值或负值。它与误差的绝对值不同，后者是不考虑正负号的绝对值。

2. 相对误差

相对误差 ε 是绝对误差 δ 与被测量的真值 x_0 的比值，一般用百分比（%）表示。由于测得值 x 与真值很接近，故也可近似地用绝对误差与测得值之比作为相对误差。即

$$相对误差\ \varepsilon = \frac{\delta}{x_0} \approx \frac{\delta}{x}$$

在测量工作中，主要是用绝对误差来表示测量误差。相对误差常用来表示具有多档示值

范围的仪表的测量精度,还可用来比较不同量值的测量精度。

实际测量中有这样一种规律,即被测量值越大(特小的难于测量的量值除外),其测量误差也越大(对用同一计量器具和相同的测量方法及条件而言)。所以用绝对误差来比较两个相差较大的和(或)用不同测量方法测得的量值的测量精度,就显得不合理,这时宜用相对误差来比较。

如用某种方法测得一尺寸的结果 $L_1 = 100$ mm,误差 δ_1 为 ± 0.01 mm,而用另一种方法测得另一尺寸 $L_2 = 20$ mm,误差 δ_2 为 ± 0.005 mm(这里误差值的正负号表示误差的范围,详见第二章)。

用相对误差来比较两者的测量精度:

$$\varepsilon_1 = \frac{\pm 0.01}{100} = \pm 0.01\ \%$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\pm 0.005}{20} = \pm 0.025\ \%$$

$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$,故知测量尺寸 L_1 的精度比 L_2 高。如用绝对误差来比较,就会得出相反的不正确结论。

四、精密度、正确度、精确度(准确度)

测得值与真值的接近程度,称为精度。它可分为:

1. 精密度

表示实验(测量)结果中的随机误差的大小程度,即在一定的条件下,进行多次重复实验(测量)时,所得实验(测量)结果彼此之间符合的程度,它通常是用随机误差(见第二章)来表示。一个实验的随机误差小,则其精密度高。

2. 正确度

表示实验(测量)结果中的系统误差的大小程度,即在规定的条件下,在实验(测量)中,所有系统误差的综合。一个实验的系统误差小,则其正确度高。

3. 精确度(准确度)

精确度是实验(测量)结果中,系统误差与随机误差的综合,即精密正确的程度。它表示实验(测量)结果与真值的一致程度。精确度反映了实验(测量)的各类误差的综合。如一个实验的系统误差和随机误差都很小,则其精确度高。

图 1—2 所示的打靶结果,子弹着靶点有三种情况:图(a)为系统误差和随机误差都大,即正确度,精密度都低;图(b)为系统误差大,随机误差小,即正确度低,精密度高;图(c)为系统误差和随机误差都小,即精确度高。

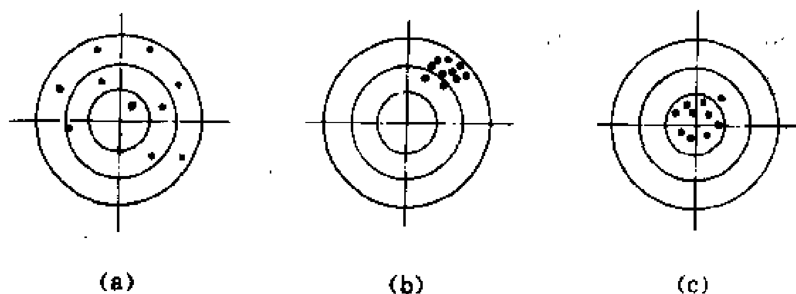


图 1—2

五、测量误差的来源

测量误差的来源是多方面的，主要可归纳为：

1. 标准器具的误差

作为在测量中提供标准量的标准器具，如光波波长、标准线纹尺、量块、砝码、标准电阻等，它们本身所体现的量值，不可避免地含有一定的误差（一般误差值相对较小）。

2. 测量装置的误差

测量装置误差包括计量器具的原理误差、制造装调误差；被测件在测量仪器上安置时的定位误差；附件误差；以及接触测量中测量力与测量力变化引起的误差等。

3. 方法误差

由于测量方法的不完善所引起的误差。如采用近似的计算方法，用钢卷尺测出大尺寸轴的圆周长 s，然后由公式 $d = s/\pi$ 计算出轴的直径 d 所引起的误差；又如采用触针法测量工件的表面粗糙度时，由于触头的圆角半径引起的误差等。

4. 测量者的误差

由于测量者的固有习惯、分辨能力的限制、工作疲劳引起的视觉器官生理变化、精神因素引起的一时疏忽等原因所引起的误差。如瞄准误差与读数误差。

5. 客观环境引起的误差

由于各种环境因素与规定的标准状态不一致而引起标准器、测量装置和被测件本身的变化所造成的误差。这些环境因素有：温度、湿度、气压、振动、照明、电磁场等，其中以温度尤为重要。

六、研究误差的目的

在计量测试领域，研究误差有着极为重要的意义，其目的在于：

(1) 分析误差的性质和产生的原因，并采取相应的措施，以便从根源上消除误差，或将误差减小到最低限度。

(2) 正确计算和处理各种测量数据，尽可能提高测量结果的精确度。正确表达测量结果，以适应各方面的需求和交流。

(3) 合理地安排测量过程，正确地设计或选用计量器具和测量方法，以求在满足测量精度要求的前提下，提高测量效率，降低测量成本。

§1—5　有效数字与数值运算

一、近似值概念

物理量大多是由观测所确定，因而不可避免会含有误差。即测得值是一代表真值的近似值。误差值同样也是近似的。测量某被测量所得到的近似值往往是设计工作的根据，是实际工程工作的基础。

在运用近似计算法进行计算时，所得结果亦为近似值，通常在保证能达到所要求的近似程

度的前提下，应使计算工作合理简化，即一方面应避免盲目追求不切实际、没有必要的精确计算，致使计算工作繁复，既浪费人力又耗费时间；另一方面又要保证达到要求的精确程度，不能图省事，以致造成错误。

在计算机应用日益普遍的情况下，近似值及运算数字的选取应多加注意，周密分析，以使计算程序简化，计算效率提高，近似程度合理、可靠。

二、有效数字和有效位数

任何测量数据，都含有测量误差。多取数据的位数，并不能减小测量误差，相反，会使计算复杂，并给人造成误解。因此，测量数据的位数，应与其测量误差相适应。

例如用分度值为0.01 mm的外径千分尺测得一尺寸为74.986 mm(最后一位“6”是估读的)，已知该千分尺的测量误差范围为±0.005 mm，即尺寸的真值应在74.981～74.991 mm之间。显然小数点后第二位已不准确(可能是8或9)，再后一位就更不准确了。因此统一规定，一个正确有效的测量数据，只允许最后一位不准确。

一个数据，从第一个非“0”的数字开始，到(包括)最后一位唯一不准确的数字为止，都是有效数字，有效数字的位数，叫做有效位数。有效位数后面的数字，即多余的位数，应按数据修约的国家标准(GB 8107—1987)的规定，作修约处理。修约就是修整约简的意思。

一个近似数有 n 个有效数字，也叫这个近似数有 n 个数位。如3.141 6，2.117 3，280.00，均为5位有效数字；0.001 34，134，1.34 均为3位有效数字。

在判断有效数字时，要特别注意“0”这个数字，它可以是有效数字，也可以不是有效数字，如0.001 34的前面3个0均不是有效数字，因为这3个0与0.001 34的精确度无关，只与测量单位有关。又如280.00的后面3个0，却均为有效数字，因为这3个0与280.00的精确度有关。若设此两数均是采用“四舍五入”法截取所得，对于0.001 34，其误差的绝对值为0.000 005，若去掉此近似数前面的3个0，则可写成 134×10^{-5}，其误差的绝对值为 0.5×10^{-5}，与精确度无关，而对于280.00，其误差的绝对值为0.005，若去掉此近似数后面的3个0，则可写成 28×10，其误差的绝对值为 $0.5\times10=5\neq0.005$，即与精确度有关。因此，对待近似数时，不可象对待准确数那样，随便去掉小数点部分右边的0，或在小数点部分右边加上0，因为这样做的结果，虽不会改变这个数的大小，却改变了它的精确度。

数据修约简单地说就是采用“四舍五入”的方法，具体规定如下：

(1) 拟舍弃的数字最左一位小于5时舍去。如34.945修约成3位则为34.9(拟舍弃的数字为45，最左一位为4)。

(2) 拟舍弃的数字最左一位大小5时(包括等于5而其后还有非“0”的数字)则进1，即保留的末位数再加1。如34.965修约成3位则为35.0(不能写成35)。

(3) 拟舍弃的数字最左一位恰好等于5(其后没有数字或皆为“0”)，则看“5”前面的数字：为奇数时去5进1，为偶数时去5不进，即使数据的末位数总是偶数。如573.5及74 650两数，都修约成3位则分别为574和 746×10^2。

工程上对近似数右边带有若干个“0”的数字，常写成 $a\times10^n$ 形式($1\leqslant a<10$)，这时有效位数由 a 确定，如 2.40×10^3 和 2.4×10^3 分别表示为有3位和2位有效数字，二者的精度是不同的。

三、数据运算规则

数据的运算误差有大有小，符号有正有负，因而在运算过程中，就必然要相互抵消一部分。在实际运算中，为了保证最后结果有尽可能高的精度，应遵循下述规则：

(1) 多个近似数(不超过 10 个)作加、减运算时，小数位数较多的近似数，只需比小数位数最少的近似数多保留一位。而计算结果的小数位数，应与小数位数最少的那个近似数相同。例如：

$$
\begin{aligned}
&1\,425.4 + 343.1 + 11.243 + 9.742\,7 \\
\approx &1\,425.4 + 343.1 + 11.24 + 9.74 \\
= &1\,789.48 \approx 1\,789.5
\end{aligned}
$$

(2) 若参加运算的各数属同一数量级，且第一位数的大小相差较大时，为避免第一位数小的那个数的相对误差过大，可将其有效位数多保留一位。

(3) 两个近似数作乘、除运算时，有效位数较多的近似数，比有效位数少的多保留一位，计算结果应保留与有效位数少的那个数相同的有效位数。例如：

$$3.142 \times 2.4 \approx 3.14 \times 2.4 = 7.536 \approx 7.5$$

(4) 在近似数作乘方或开方运算时，计算结果的有效位数与原来近似数(被乘方或开方数)的有效位数相同。乘方与开方实质上是乘、除运算，故这实际上是采用乘、除运算规则。

(5) 在三角函数的运算中，函数值的位数应随角度误差的减小而增多，当角度误差为 10″，1″，0.1″及 0.01″时，对应的函数值位数应为 5，6，7 及 8 位。

(6) 作对数运算时，n 位有效数字的数据应该用 n 位或($n+1$)位对数表。

(7) 如运算所得的数据还要进行再运算，则该数据的有效位数可比应截取的位数暂时多保留一位数字。

(8) 表示误差范围的参数，如测量不确定度、标准差等(均见后述)，其有效位数一般为一位，最多为两位。

第二章　等精度测量的随机误差

若在多次重复测量(测量列)中,每一个测得值都是在相同的测量条件下获得的,这样,各测得值就具有相同的精度,可用同一标准差来表征,或者说具有相同的可信赖程度。这样的测量,就叫做等精度测量。

从测量实践可知,在排除了系统误差和粗大误差的情况下,对某一物理量进行等精度的多次测量时,其测得值中还会含有随机误差。对于测量列中的某一个测得值而言,这类误差的出现具有随机性,即误差的大小和符号是不能预先知道的;当测量次数增大,这类误差却又具有统计的规律性,测量次数愈多,这种规律性就表现得愈明显。随机误差的这种统计规律常称为误差分布律。在测量误差理论中,最重要的一种分布律是正态分布律,因为通常的测量误差是服从正态分布的。当然,在有些情况下,随机误差还有其他形式的分布律,如均匀分布、三角形分布、偏心分布和反正弦分布等。根据误差的分布律,就可对测量数据进行适当的处理。

随机误差的产生有其主观和客观的原因,这些原因一般是由许多难以控制的和经常变化的微小因素所造成。一般地说,凡能产生测量误差的诸因素都有可能会引起随机误差,当然应将影响其系统误差的因素除外。

§2—1　正态分布的特征

通过大量的对测量数据的观察,人们总结出了大多数的随机误差具有以下 3 个特征,它常被称做随机误差公理[15]。

(1) 在一定的测量条件下(指一定的计量器具、环境、被测对象和人员等),随机误差的绝对值不会超过一定的界限;

(2) 小误差出现的机会比大误差出现的机会要多;

(3) 测量次数 n 很大时,绝对值相等、符号相反的随机误差出现的机会相等。

由特征(3)不难推理,对同一量进行等精度测量,随着测量次数 n 趋于无穷大,随机误差的算术平均值将趋于零。

多数随机误差的上述特征,说明其分布实际上是有界限的和单一的峰值,且当测量次数无穷地增加时,这类误差还具有对称性(即相消性)。这种误差的分布规律,人们称之为正态分布律。

§2—2　随机误差的数字特征

用于描述随机误差分布特征的数值叫做随机误差的数字特征。

对于离散型或连续型的随机误差,它在数轴上的分布规律,虽可采取分布函数或分布密度函数及其相应的分布曲线图形来表示,但在实际测量数据处理中,要确定误差的分布函数或分布密度函数,是很困难的,一般也是不必要的,若知道了随机误差的数字特征,就能明确地说明

随机误差分布的特征。

随机误差的数字特征主要有两个：①算术平均值；②标准差。前者通常是随机误差的分布中心，后者则是分散性指标。例如，当随机误差服从正态分布时，在算术平均值处随机误差的概率密度最大，由多次测量所得的测得值是以算术平均值为中心而集中分布的；而标准差则可描述随机误差的散布范围，标准差愈大，测量数据的分散范围也愈大。显然，算术平均值可以作为等精度多次测量的结果，而标准差可以描述测量数据和测量结果的精度。

一、算术平均值

对一个真值为 x_0 的物理量进行等精度的 n 次测量，得 n 个测得值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，它们都含有误差 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$，统称真差。通常，我们是以算术平均值 $\bar{x}$ 作为 n 次测量的结果，即

$$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\frac{\sum x_i}{n} \tag{2—1}$$

因有

$$\left.\begin{aligned}\delta_1&=x_1-x_0\\\delta_2&=x_2-x_0\\&\vdots\\\delta_n&=x_n-x_0\end{aligned}\right\} \tag{2—2}$$

故真值 x_0 可以写成

$$x_0=x_1-\delta_1=x_2-\delta_2=\cdots=x_n-\delta_n$$

或

$$nx_0=\sum x_i-\sum\delta_i$$

代入式(2—1)，得：

$$\bar{x}=x_0+\frac{\sum\delta_i}{n} \tag{2—3}$$

上式中的真差 δ_i 即为随机误差，当测量次数 $n\to\infty$ 时，根据随机误差公理(3)，$\sum\delta_i\to 0$，则得：

$$\bar{x}=x_0$$

这个结果说明，当测量次数 n 无限增大时，测得值的算术平均值 $\bar{x}$ 就等于真值 x_0。但在实际上，进行无穷多次的测量是不可能的，因此真值 x_0 实际上也不可能得到，然而可以认为，当测量次数 n 适当大时，算术平均值 $\bar{x}$ 是最接近于真值 x_0 的(证明见后)。

通常在有限次测量时，$\bar{x}$ 不可能等于真值 x_0，所以 $\bar{x}$ 也是随机变动的，设想进行 m 组的“多次测量”，各组所得的算术平均值为 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m$，这些算术平均值 $\bar{x}_i$ 本身并不含系统误差，它们是围绕真值 x_0 而随机变动，故 $\bar{x}_i$ 是无偏估计量。

在计量测试中，都以 $\bar{x}$ 作为多次测量的结果，它是诸测得值中最可信赖的，常称最或然值。

为了计算方便，算术平均值 $\bar{x}$ 也可按下式计算：

$$\bar{x}=\frac{\sum m_ix_i}{n}=C+\frac{\sum m_i(x_i-C)}{n} \tag{2—4}$$

式中，$m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是测量值 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 重复出现的个数，总测量次数 $n = \sum m_i$；C 为任意常数。

例 2—1 求20.000 5，19.999 6，20.000 3，19.999 4，20.000 2五个测得值的算术平均值。

解：

一般算法：

$$\bar{x} = \frac{20.000\,5 + 19.999\,6 + 20.000\,3 + 19.999\,4 + 20.000\,2}{5} = 20.000\,0$$

简化算法：

$$\bar{x} = 20.000\,0 + \frac{0.000\,5 - 0.000\,4 + 0.000\,3 - 0.000\,6 + 0.000\,2}{5} = 20.000\,0$$

二、标准差（或标准偏差）[●]

上述的算术平均值 $\bar{x}$ 虽能表示一组测得值的结果，但它不能表示这一组测得值的精度。例如，有下列两组测得值，即

第Ⅰ组：20.000 5，19.999 6，20.000 3，19.999 4，20.000 2

第Ⅱ组：19.999 0，20.000 6，19.999 5，20.001 5，19.999 4

这两组测得值的算术平均值都为20.000 0，但它们的测量精度明显地不同。容易看出，第Ⅱ组数据的分散要比第Ⅰ组为大，即第Ⅰ组测得值的测量精度要高于第Ⅱ组。

为评定一组测得值的精度，数学上常采用二次矩来描述，因为二次矩可避免正、负随机误差的相消。在计量学中，参照这种方法，用标准差 σ 来评定测得值的精度，即

$$\sigma = \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2}{n}} \quad (n \to \infty) \qquad (2—5)$$

式中：δ_i——真差（随机误差）；

n——测量次数。

由式（2—5）可见，标准差与测得值具有相同的量纲，且只取正开方根值。

三、用残差计算标准差的估计值

标准差的定义式（2—5）是在假定真值 x_0 为已知的情况下，根据真差 δ_i 来计算的；但实际上真值 x_0 是不知的，因而真差也无法获知，故该定义式只有理论的意义，而无法实际应用。

由于在有限次测量时得到的是有限个测得值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，并可从该组测得值计算出最接近于真值 x_0 的算术平均值 $\bar{x}$，所以就用 $\bar{x}$ 代替 x_0 来计算标准差 σ 的估计值 σ_s，亦即 σ_s 用各测得值 x_i 对其算术平均值 $\bar{x}$ 的误差量来计算，该误差量叫做残余误差，简称残差，因此各测值的残差 v_i 可用下式表示：

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= x_1 - \bar{x} \\ v_2 &= x_2 - \bar{x} \\ &\vdots \\ v_n &= x_n - \bar{x} \end{aligned}\right\} \qquad (2—6)$$

● 标准偏差是由 Standard deviation 直译的，但它不是偏差，偏差另有定义。

残差 v 有两个重要的特性：

(1) 一组测得值残差之和等于零，即

$$\sum v_i = 0$$

式(2—6)相加，有

$$\sum v_i = \sum x_i - n\bar{x}$$

将式(2—1)代入上式，即得：

$$\sum v_i = \sum x_i - n\frac{\sum x_i}{n} = 0$$

(2) 一组测得值残差的平方和为最小，即

$$\sum v_i^2 = 最小$$

因为，将式(2—6)平方，得：

$$v_1^2 = x_1^2 - 2\bar{x}x_1 + \bar{x}^2$$

$$v_2^2 = x_2^2 - 2\bar{x}x_2 + \bar{x}^2$$

$$\vdots$$

$$v_n^2 = x_n^2 - 2\bar{x}x_n + \bar{x}^2$$

相加，有

$$\sum v_i^2 = \sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + n\bar{x}^2$$

如果 $\sum v_i^2$ 为最小，则必须

$$\frac{\mathrm{d}(\sum v_i^2)}{\mathrm{d}\bar{x}} = -2\sum x_i + 2n\bar{x} = 0$$

解得

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

此结果表明，如果不取 $\bar{x}$，而取其他值代替真值 x_0，则相应偏差的平方和一定要比残差的平方和为大，这也同时说明了 $\bar{x}$ 比其他值更可信赖。

下面来讨论真差 δ 与残差 v 之间的关系。

因为

$$\delta_i = x_i - x_0; \quad v_i = x_i - \bar{x}$$

所以

$$\delta_i - v_i = \bar{x} - x_0 = \delta_{\bar{x}}$$

$$\delta_i = v_i + \delta_{\bar{x}}$$

式中，$\delta_{\bar{x}}$为算术平均值的真差。

相加，有

$$\sum \delta_i = \sum (v_i + \delta_{\bar{x}}) = \sum v_i + n\delta_{\bar{x}}$$

因为

$$\sum v_i = 0$$

故

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{1}{n}\sum \delta_i$$

由随机误差的特征知，当 $n \to \infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum \delta_i \to 0$，则 $\delta_{\bar{x}} = 0$，即 $\bar{x} = x_0$，或 $\delta_i = v_i$。这表

明:在测量次数 n 足够多的条件下,一切有关真差 δ 的理论均适用于残差 v。

因为

$$\delta_i = v_i + \delta_{\bar{x}}$$

两边平方,有

$$\delta_i^2 = v_i^2 + 2\delta_{\bar{x}}v_i + \delta_{\bar{x}}^2$$

取 n 项求和,得:

$$\sum \delta_i^2 = \sum v_i^2 + 2\delta_{\bar{x}} \sum v_i + n\delta_{\bar{x}}^2$$

因为

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{1}{n}\sum \delta_i$$

故

$$\delta_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n^2}\left(\sum \delta_i^2 + 2\sum \delta_i\delta_k\right) \quad (i < k)$$

当 n 足够大时,上式中 $\sum \delta_i\delta_k$ 接近于0,又因

$$\sum v_i = 0$$

故

$$\sum \delta_i^2 = \sum v_i^2 + n\frac{\sum \delta_i^2}{n^2} = \sum v_i^2 + \frac{\sum \delta_i^2}{n}$$

上式中,$\dfrac{\sum \delta_i^2}{n}$ 即为 σ^2。

故

$$n\sigma^2 = \sum v_i^2 + \sigma^2$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum v_i^2}{n-1} \tag{2—7}$$

一般测量次数 n 较少时,上式的 σ^2 常写作 σ_s^2 或 s^2。这个公式的意义在于真差 δ 是不知道的,由式(2—7)就可根据有限个测量值的残差 v 来求取随机测量误差方差的估计值 σ_s^2。将式(2—7)开方,得:

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}{n-1}} \tag{2—8}$$

σ_s 称为实验标准差,它是标准差 σ 的估计值。式(2—8)称为贝塞尔(Bessel)公式。类似于式(2—4),式(2—8)也可作如下简化计算:

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - C)^2 - n(\bar{x} - C)^2}{n-1}} \tag{2—9}$$

式中,C 是为简化计算而任选的常数。

如果各测得值不只出现一次,而是 m_i 次,总次数 $n = \sum m_i$,则上式可写成

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{\sum m_i(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum m_i(x_i - C)^2 - n(\bar{x} - C)^2}{n-1}} \tag{2—10}$$

标准差 σ 以及下面将要讲到的平均误差 ϑ、几率误差 ρ 和极限误差 $\delta_{\lim}$ 等都是表示随机误差很重要的特征量,都可用于描述测量列中各个测得值的误差。因 σ 甚为重要,故必须进一步说明它的含义和对测量的作用。例如,对某一量测量 50 次,得测得值 $x_1, x_2, \cdots, x_{50}$,根据

此 50 个数据计算出标准差的估计值 σ_s，则 σ_s 可作为表征测量列中每一个测得值 x_1 或 $x_2\cdots$ 或 x_{50}的误差的参数。由于统计的数据量已经相当大(50 个)，我们于是可以断定，若再多测几个 x_i，也不会明显地改变 σ_s 的数值。因此，由大量统计得出的 σ_s，便可表征在相同条件下测出的另一测量列中测得值的误差。所以，若再测一次得测得值 x_{51}，我们仍可用 σ_s 来表征其误差。又譬如某量仪厂，从一批产品中抽出同类产品 100 台，用此 100 台仪器测量同一量(例如，在同一条件下测同一塞规直径)，得测得值 $x_1,x_2,\cdots,x_{100}$，按此数据计算(统计)出 σ_s，则 σ_s 就可表征此 100 台中任一台仪器的误差(精度)。由于统计的数目较大，故 σ_s 也可表征此 100 台以外的同类产品的误差或精度。关于标准差等特征量的确切含义(用概率解释)将在本章第 3、4 两节中进一步说明。

四、算术平均值的标准差及其估计值

对于测量误差服从正态分布的测得值，可用其标准差 σ 来评定测量的精度。在多次测量中，由于其算术平均值 $\bar{x}$ 是最接近于被测量的真值x_0，所以需要进一步分析 $\bar{x}$ 的精度。在有限次测量的条件下，$\bar{x}$ 不等于真值x_0。由 m 组不同的"多次测量"所得的算术平均值 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m$，是围绕真值 x_0 而随机变动的，$\bar{x}_i$ 也有其确定的分布，故算术平均值 $\bar{x}$ 的精度也可由其标准差$\sigma_{\bar{x}}$来评定，它与 σ 的关系可推导如下。

设想进行 m 组的"n 次重复测量"，各组的测量次数 n 仅为有限次，即各组测得值的算术平均值 $\bar{x}_j$ 不等于真值x_0，$\bar{x}_j$ 尚具有真差 $\delta_{\bar{x}_j}(j=1\sim m)$，我们列出

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}_1 &= \frac{1}{n}(x_{1_1}+x_{1_2}+\cdots+x_{1_n})\\ \bar{x}_2 &= \frac{1}{n}(x_{2_1}+x_{2_2}+\cdots+x_{2_n})\\ &\vdots\\ \bar{x}_m &= \frac{1}{n}(x_{m_1}+x_{m_2}+\cdots+x_{m_n})\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{—}11)$$

显然，上式中 $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_m$ 为随机变量，但测得值 $x_{1_i},x_{2_i},\cdots,x_{m_i}(i=1\sim n)$也是服从正态分布的随机变量，且其分布的理论均值为 μ_i 及方差为σ^2，故随机变量 $\bar{x}_j(j=1\sim m)$的分布就是 n 个正态分布的合成。由概率论原理可知，正态分布和的分布仍为正态分布，且其方差为各合成正态分布的方差和，将上式写成一般形式：

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n}(x_{j_1}+x_{j_2}+\cdots+x_{j_n})\quad(j=1\sim m)$$

取方差

$$D(\bar{x}) = \frac{1}{n^2}[D(x_1)+D(x_2)+\cdots+D(x_n)]$$

但

$$D(x_1)=D(x_2)=\cdots=D(x_n)=\sigma^2$$

故

$$D(\bar{x})=\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{1}{n^2}(n\sigma^2)=\frac{\sigma^2}{n}$$

即

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\qquad(2\text{—}12)$$

或

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_s}{\sqrt{n}}$$

由上式可见，在测量条件一定，即 σ_s 一定的情况下，算术平均值的标准差随着测量次数 n 的增加而减小。如测量次数 $n=4$，则 $\sigma_{\bar{x}}$减小 1 倍；当 $n=9$ 时，$\sigma_{\bar{x}}$就减小 3 倍，即其随机误差得到有效的控制，提高了测量的精度。不过，当 n 增加到一定次数(例如 10 次)以后，$\sigma_{\bar{x}}$的减小就变得缓慢，即精度提高得很慢，图 2—1 所示为 $\sigma_{\bar{x}}/\sigma_s$ 比值与测量次数 n 的关系曲线。所以在一般精密测量中，等精度重复测量的次数 n 多小于 10 次，超过 15~20 次的情况比较少见，此时若要进一步提高测量精度，则需采取其他措施来解决(如提高仪器精度，改进测量方法，改善环境条件等)。

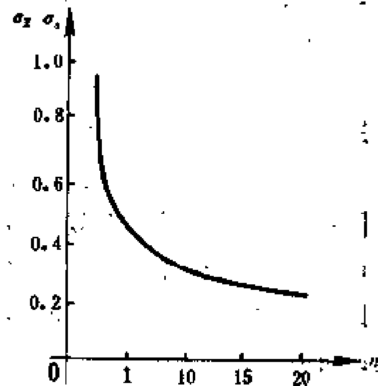


图 2—1

例 2—2 计算表2—1所列两组测得值的标准偏差 σ_s。

表 2—1 两组测量的测得值

组 别	测得值 x_i				
第Ⅰ组	20.000 5	19.999 6	20.000 3	19.999 4	20.000 2
第Ⅱ组	19.999 0	20.000 6	19.999 5	20.001 5	19.999 4

解：

第Ⅰ组

在例 2—1 中，已计算出 $\bar{x}_{\mathrm{I}}=20.000\,0$。故得残差 $v_i=x_i-\bar{x}_{\mathrm{I}}$ 为 +0.000 5，−0.000 4，+0.000 3，−0.000 6，+0.000 2。

由式(2—8)计算 σ_s 为

$$\sigma_s=\sqrt{\frac{25+16+9+36+4}{5-1}}\times10^{-4}=4.7\times10^{-4}\approx0.000\,5$$

第Ⅱ组

用类似方法，可算出 $\bar{x}_{\mathrm{II}}=20.000\,0$。其残差 v_i 为 −0.001 0，+0.000 6，−0.000 5，+0.001 5，−0.000 6。

由式(2—8)计算 σ_s 为

$$\sigma_s=\sqrt{\frac{100+36+25+225+36}{5-1}}\times10^{-4}=10\times10^{-4}=0.001$$

比较一下两组测得值的计算结果，它们的算术平均值虽是相等的，但第Ⅱ组的标准差比第Ⅰ组约大了 1 倍，说明第Ⅱ组测得值的随机误差大，测量精度比第Ⅰ组要低。

例 2—3 用机械测微仪测量某零件直径共51次，测得的数据如表 2—2 所列，试求测得值的各特征量——$\bar{x}$，σ_s，$\sigma_{\bar{x}}$。

解：为了简洁清楚，采用列表计算的方法，表中 x_i 为测得值，m_i 为x_i 出现的频数，而 $n=\sum m_i=51$ 为总测量次数。

表 2—2 例 2—3 一般算法

序号	x_i/mm	m_i	m_ix_i/mm	$x_i-\bar{x}$/μm	$(x_i-\bar{x})^2$/μm²	$m_i(x_i-\bar{x})^2$/μm²
1	25.125	2	50.250	−3	9	18
2	25.126	3	75.378	−2	4	12

续表

序号	x_i/mm	m_i	m_ix_i/mm	$x_i-\bar{x}$/μm	$(x_i-\bar{x})^2$/μm²	$m_i(x_i-\bar{x})^2$/μm²
3	25.127	9	226.143	−1	1	9
4	25.128	16	402.048	0	0	0
5	25.129	11	276.419	+1	1	11
6	25.130	7	175.910	+2	4	28
7	25.131	2	50.262	+3	9	18
8	25.132	1	25.132	+4	16	16
Σ		51	1 281.542		44	112

$$\bar{x}=\frac{\sum m_ix_i}{\sum m_i}=\frac{1\,281.542}{51}=25.128\ \text{mm}$$

$$\sigma_s=\sqrt{\frac{\sum m_i(x_i-\bar{x})^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{112}{50}}=1.5\ \mu\text{m}$$

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_s}{\sqrt{n}}=\frac{1.5}{\sqrt{51}}=0.2\ \mu\text{m}$$

表 2—3　　例 2—3 简化算法

序号	x_i/mm	m_i	C/mm	x_i-C/μm	$m_i(x_i-C)$/μm	$(x_i-C)^2$/μm²	$m_i(x_i-C)^2$/μm²
1	25.125	2	25.128	−3	−6	9	18
2	25.126	3		−2	−6	4	12
3	25.127	9		−1	−9	1	9
4	25.128	16		0	0	0	0
5	25.129	11		+1	11	1	11
6	25.130	7		+2	14	4	28
7	25.131	2		+3	6	9	18
8	25.132	1		+4	4	16	16
Σ		51			14		112

$$\bar{x}=C+\frac{\sum m_i(x_i-C)}{n}=25.128+\frac{0.014}{51}=25.128\ \text{mm}$$

$$\sigma_s=\sqrt{\frac{\sum m_i(x_i-C)^2-n(\bar{x}-C)^2}{n-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{112}{50}}=1.5\ \mu\text{m}$$

$$\sigma_{\bar{x}}=\frac{\sigma_s}{\sqrt{n}}=\frac{1.5}{\sqrt{51}}=0.2\ \mu\text{m}$$

§2—3 随机误差的正态分布曲线

一、经验分布曲线

为了研究随机误差的分布特性，常应用实验的方法，将一组等精度测量的测得值画成经验分布曲线(图 2—2)。该曲线能形象地反映随机测量误差的特征。

设对某一物理量进行多次测量，共得到 51 个测得值，将这些测得值按大小分成若干个等间距组(如表 2—4 所列共分成 11 个组)，落入某一个间距组的测得值，其测值一般会有差异的，但在数据处理时都以该间距组的中值代表这些测得值。例如，表中的第 5 组，其间距范围是从 1.045 至 1.055 mm，共有 10 个测得值落入这一间距中，数据处理时，我们以该间距的中值代表这 10 个测得值，即 $x_5 = 1.05$ mm；以 m_i 代表各间距组测得值的个数，称为频数，此处 $m_5 = 10$；而频数 m_i 与全部测得值的个数 n 的比值 m_i/n 称作频率。显然，$n = \sum m_i$，$\sum \frac{m_i}{n} = 1$。

在经验分布曲线图中，横坐标 x 代表各组的中值 x_i(即测得值)，纵坐标 y 则代表各组的频率密度。频率密度 y 有其明确的几何意义：设各间距组的间距范围为 Δx，某组的出现频率为 m_i/n，则该间距组的频率密度 $y_i = \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{m_i}{n}$。显然，在经验分布曲线图上，各间距组所对应的矩形面积即代表该组出现的频率。

表 2—4　　经验分布曲线数据表　　(mm)

序号	组的中值 x_i	频数 m_i	$m_i x_i$	$x_i - \bar{x}$
1	1.01	1	1.01	−0.044
2	1.02	3	3.06	−0.034
3	1.03	6	6.18	−0.024
4	1.04	8	8.32	−0.014
5	1.05	10	10.50	−0.004
6	1.06	7	7.42	+0.006
7	1.07	8	8.56	+0.016
8	1.08	4	4.32	+0.026
9	1.09	3	3.27	+0.036
10	1.10	0	0	+0.046
11	1.11	1	1.11	+0.056
Σ		51	53.75	
$\bar{x} = \frac{53.75}{51} = 1.054$ mm				

经验分布曲线的绘制方法是：在横坐标上标出以中值为代表的各个间距 x_i，再在各个等间距 Δx 上，画上相应的矩形，各组矩形的面积应与该组内出现的频率相对应，因此，各组矩形面积的总和，相应地等于各组频率的总和，即为 1。

连接各矩形上边的中点，即可得到经验分布曲线，如图 2—2 中虚折线所示。

当测得值总数 n 甚大，间距 Δx 甚小，且组数选择适当时，所得的经验分布曲线就趋近于光滑曲线，即图中的理论分布曲线。

既然在绘制经验分布曲线时，各组矩形的面积是代表其相应的呈现频率，所以第 1 个测得值区间(x_1,x_2)的呈现概率应为分布曲线下从 x_1 至 x_2 所夹的面积，即

$$P[x_1 \leqslant x < x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x$$

式中，$y = f(x)$ 为分布密度函数或分布方程。

若 $f(x)$求出，则以上指定区间内的概率就可以算出。

如果将上图的坐标系的坐标原点移至测得值的数学期望 $E = \mu$ 的位置上，则横坐标 x 就代表测得值 x_i 对于μ 的偏差值$(x_i - \mu)$。所谓测得值的数学期望 μ，对连续型随机变量来说，它是随机变量全部可能取值的算术平均值，也称理论均值或均值，故在正态分布方程中，有时就以 $\bar{x}$ 代替 μ。当然，需要特别说明的是，在有限次测量的情况下，算术平均值也会含有误差，因此，多数情况下，它不等于理论均值 μ，而是以 μ 为坐标原点或左或右摆动。通常，正态分布曲线是围绕于理论均值 μ 处而对称分布的，即曲线在 μ 处具有最大的概率密度 y_{max}。

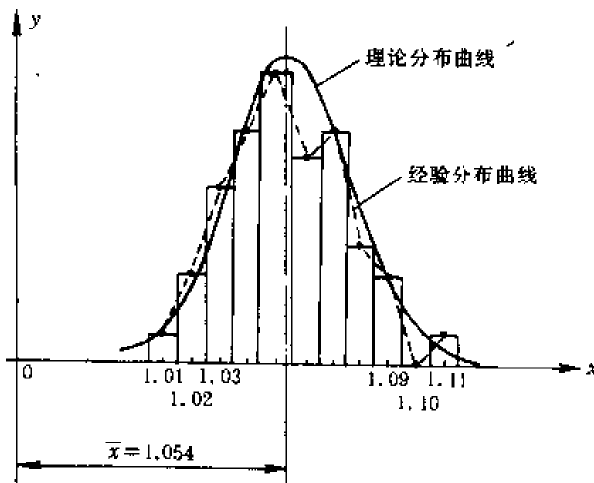


图 2—2

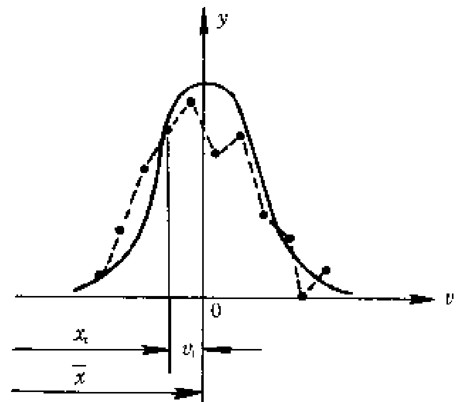


图 2—3

在本例中，由于测得值的个数较多，若在绘制经验分布曲线时将坐标原点移至算术平均值 $\bar{x}$ 处，则横坐标 x 就代表测得值的残差 v，但所得出的经验分布曲线形状不变。由图 2—3 可见，曲线大体上在坐标原点处出现最大的概率密度。

二、正态分布曲线

正态分布也称高斯(Gauss)分布，它是随机误差的一种重要分布。实践表明，在大多数情况下，在测量过程中产生的误差是服从正态分布的。概率论的中心极限定理从理论上说明了上述现象的必然性，该定理指出："有许多随机变量，它们是由大量相互独立的随机因素的影响所组成，而每一个别因素在总的影响中所起的作用可以看作是均匀的小，那么，这类随机变量应该是服从或近似服从正态分布的"[10]。

正态分布曲线的分布密度函数 $f(x)$ 可由随机误差公理推导得出（详细的推导过程可参阅本章第七节），即

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{2—13}$$

式中： y——概率密度；

x——随机变量；

σ——标准差；

e——自然对数的底（e=2.718…）；

μ——理论均值或随机变量 x 的数学期望。

μ 的表达式为

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\mathrm{d}x \tag{2—14}$$

由于被测量的真值是无法知道的，对连续型随机函数，可以将理论均值看作为真值，故式(2—13)可改写成

$$y = f(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \tag{2—15}$$

式中，自变量 δ 为随机误差。

若用 $\bar{x}$ 代替 μ，式(2—13)又可写成

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \tag{2—16}$$

或

$$y = f(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \tag{2—17}$$

上式说明，当测量次数足够大时，正态分布方程式(2—15)同样也可适用于残差 v。

现在来讨论正态分布方程中两个重要的参数和曲线的特性。

1. 理论均值 μ 或算术平均值 $\bar{x}$

理论均值或算术平均值的定义已如前述，式(2—13)所列的正态分布的曲线图形如图2—4(a)所示，即为一条钟形的曲线。该曲线在 $x=\mu$ 处具有极大值，即 $y_{max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$，所以该曲线是单峰的，且对 $x=\mu$ 直线是对称的。

由此，说明了随机变量在 $x\approx\mu$ 或 $\bar{x}$ 处的邻近区域内，具有最大的概率，同时也说明了以 $\bar{x}$ 作为一组随机变量（当多次测量时即为一组测得值）的结果应该是最可信赖的。此外，由于曲线对 $x=\mu$ 的直线是对称的，因此可以认为 $x=\mu$ 处是随机变量的分布中心，μ 值的大小，影响着曲线在 x 轴上的位置，如图 2—4(b)所示。

2. 标准差 σ

图 2—5 所示为具有相同理论均值 μ，但 σ 值不同的 3 条正态分布曲线的形状，由图示可见，σ 愈小，分布曲线愈陡峭，说明随机变量的分散性小，即其精度高；反之，σ 愈大，分布曲线的形状就平坦，说明随机变量的分散性较大，即其精度较低。此外，分布曲线在 $(\mu\pm\sigma)$ 处有两个拐点，可以认为在此两拐点的范围内，随机变量的出现具有较大的概率（$P\approx68\%$）。在计量测试中，常以标准差 σ 来评定一组随机变量的精度，故 σ 可作为随机变量的分散性指标。

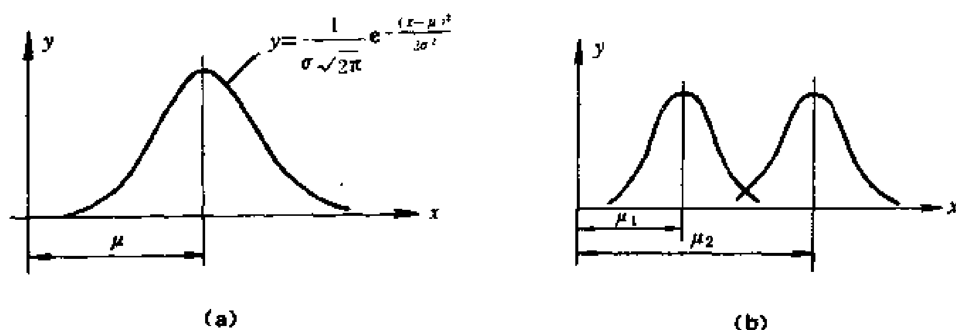


图 2—4

对连续型随机变量，其方差 $D(x)=\sigma^2$ 可按分布密度函数的二阶中心矩计算，开方后得标准差 σ，即

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2f(x)\mathrm{d}x \qquad (2—18)$$

$$\sigma=\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2f(x)\mathrm{d}x}$$

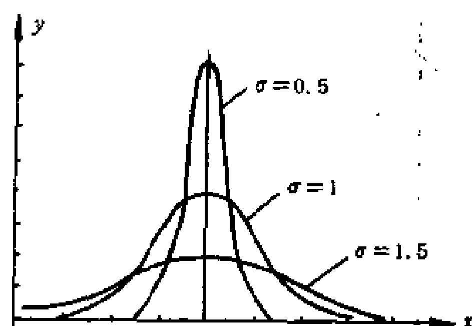


图 2—5

对离散型随机变量，标准差 σ 可按定义式(2—5)表示，即

$$\sigma\underset{n\to\infty}{=}\sqrt{\frac{\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots+\delta_n^2}{n}}$$

实际应用时，则用贝塞尔公式(2—8)计算其估计值 σ_s。

此外，从正态分布函数式(2—13)可以看出，随机变量 x 的取值范围可为 $\pm\infty$，且分布曲线以 x 轴为其渐近线，但是随机误差的特征(1)指出，在一定的测量条件下，随机误差的绝对值不会超过一定的界限，两者似乎存在着矛盾。在计量实践中，由于随机变量(或测得值)落入 $\mu\pm3\sigma$ 范围内的概率已高达99.73％(见下节)，故服从正态分布的随机变量，实际上可以认为是不超出 $\mu\pm3\sigma$ 界限的。

三、正态分布密度函数的概率积分

由于在很多情况下，测量误差是服从正态分布的，所以人们在测量数据处理时，就应用理论的分布曲线来求取测量的结果，确定其相应的误差限，以及分析测量的可靠性等。为此，需要计算正态分布在不同区间的概率。

分布曲线下的全部面积应等于总概率，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}y\mathrm{d}v=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}v=100\ \%=1$$

在任意误差区间(a,b)出现的概率为

$$p(a \leqslant v < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}dv$$

上述的计算式与参量 σ 有关，故需进行变换，令新的变量 $t = v/\sigma, dt = dv/\sigma$，故

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}}dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

将积分限也进行相应变换，令 $a' = a/\sigma$ 及 $b' = b/\sigma$，故

$$p(a' \leqslant t < b') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a'}^{b'} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

写成一般形式，即误差在区间 $\pm t_i$ 内的概率为

$$p(-t_i \leqslant t < +t_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t_i}^{+t_i} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t_i}^{+t_i} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 2\phi(t_i) \qquad (2—19)$$

上式中的定积分 $\phi(t)$ 称为拉普拉斯函数，或称概率积分。当给定积分界限 t 以后，概率积分值可从 $\phi(t)$ 表中查出(见附录表1)，表 2—5 只给出几个常用的 t 值及其相应的 $\phi(t)$ 值。

表 2—5　　常用的 t 值及 $\phi(t)$ 值

$t=\frac{v}{\sigma}$	0.674 5≈2/3	0.797 9≈4/5	1	1.96	2	2.58	3	4
$\phi(t)$	0.25	0.288 1	0.341 3	0.475	0.477 2	0.495	0.498 65	0.499 97
$2\phi(t)$	0.50	0.576 2	0.682 7	0.95	0.954 5	0.99	0.997 3	0.999 94

从表 2—5 及图 2—6 可知，当 $t = \pm 1$，即

$$p(-1 \leqslant t < 1) = p_a = 2\phi(t) = 0.682\,7$$

这里 $t = v/\sigma$，即 $v = t\sigma$，而随机变量的分布中心为理论均值 μ 或 $\bar{x}$(当测量次数 n 足够大)，那么，在多次测量的一组测得值中，将有 68.27 % 落入区间$(\bar{x} \pm \sigma)$，即

$$p\{(\bar{x} - \sigma) \leqslant x_i < (\bar{x} + \sigma)\} = 0.682\,7$$

或者说有 68.27 %的测得值的误差在 $\pm\sigma$ 的范围内，所以可以得出标准差的确切含义：我们可以以 68.27 % 的把握认为测得值的误差不超出 $\pm\sigma$。相似地有

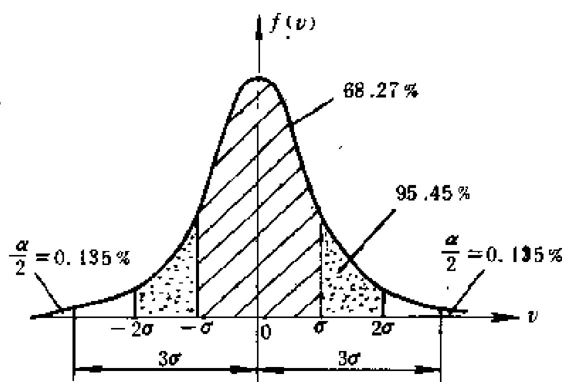


图 2—6

$$p\{(\bar{x} - 2\sigma) \leqslant x_i < (\bar{x} + 2\sigma)\} = 0.954\,5$$

$$p\{(\bar{x} - 3\sigma) \leqslant x_i < (\bar{x} + 3\sigma)\} = 0.997\,3$$

一般写成

$$p\{(\bar{x} - t\sigma) \leqslant x_i < (\bar{x} + t\sigma)\} = p_a = 1 - \alpha$$

式中，α 称为显著度；p_a 称为置信概率；积分限 $\pm t\sigma$ 称误差限；t 称置信系数。

由此可见，在讨论随机测量误差的误差限时，是与置信概率紧密相联系的，至于 p_a 的选择，则完全是人为的，主要是根据所研究的对象重要与否来决定，大多数情况取 $t = 2$，即 $p = 0.95$。以下列举几种常用的置信概率的数值及其适用的场合，以供参考。

(1) $p_\alpha=0.95(\approx\pm2\sigma)$用于一般精密测量;应用广泛;

(2) $p_\alpha=0.9973(\pm3\sigma)$或 $p_\alpha=0.99(\pm2.58\sigma)$用于较重要的科研工作和精密测量,以及仪器检定等;

(3) $p_\alpha=0.9999(\pm4\sigma)$用于个别对可靠性要求特别高的科研和精密测量工作。

例 2—4 从一批零件中抽查200个零件的尺寸,测得的偏差及数据处理过程列于表 2—6,实验统计结果为:$\bar{x}=0.5\ \mu m$,$\sigma_s=0.6\ \mu m$,试求零件尺寸对 $\bar{x}$ 的偏差在 -0.75 至 $+1.75\ \mu m$ 范围内的概率。

表 2—6　　例 2—4 数据表

序号	零件偏差 $x_i/\mu m$	频数 m_i	频率 m_i/n	$m_ix_i/\mu m$	v_i $(x_i-\bar{x})/\mu m$	$v_i^2/\mu m^2$	$m_iv_i^2/\mu m^2$
1	−1.5	2	0.01	−3	−2	4	8
2	−1	4	0.02	−4	−1.5	2.25	9
3	−0.5	16	0.08	−8	−1	1	16
4	0	28	0.14	0	−0.5	0.25	7
5	+0.5	98	0.49	+49	0	0	0
6	+1	30	0.15	30	0.5	0.25	7.5
7	+1.5	18	0.09	+27	+1	1	18
8	+2	3	0.015	+6	+1.5	2.25	6.75
9	+2.5	1	0.005	+2.5	+2	4	4
$\sum$		200		99.5			76.25

$$\bar{x}=\frac{\sum m_ix_i}{n}=\frac{99.5}{200}\approx0.5\ \mu m$$

$$\sigma_s=\sqrt{\frac{\sum m_iv_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{76.25}{199}}\approx0.6\ \mu m$$

解: 先计算其相应的 t 值

$$t_1=\frac{x_1-\bar{x}}{\sigma_s}=\frac{-0.75-0.5}{0.6}=-2.08,$$

$$t_2=\frac{x_2-\bar{x}}{\sigma_s}=\frac{1.75-0.5}{0.6}=+2.08$$

查拉普拉斯函数表,得 $\phi(t)$值,即

$$\phi(2.08)=0.4811$$

故

$$p(-0.75\ \mu m\leqslant x<1.75\ \mu m)=2\phi(2.08)\approx96\ \%$$

§2—4　单次测量的精度指标

这里讨论的是指在测量中排除了系统误差的条件下,由于纯随机误差对测量精度的影响。在进行单次测量时,其测得值一般会对理论均值产生一定的偏差(即随机误差),但它一般又不会超过 $\pm3\sigma$(置信概率 $p_\alpha=0.9973$)。当然,这里的 σ 是指误差总体分布的特征量,而单次测

量的测得值,仅可以看作是误差总体中的一次抽样而已。

评定测量精度的指标很多,以前,有的国家采用仪器示值的散布,即由一组测得值中的最大与最小的两者差值来评定。这一指标的定义简单,其含义也很明确,但基于希望对分布总体作精度评定的理由。目前,各国多采用以下各指标:

1. 标准差及其估计值 σ_s

标准差 σ 及其估计值 σ_s 的意义如前述,它们能评定一组随机变量的精度,σ_s 可按式(2—8)计算。

2. 平均误差 ϑ

平均误差 ϑ 的定义为

$$\vartheta = \frac{|\delta_1| + |\delta_2| + \cdots + |\delta_n|}{n}$$

当为连续型随机变量,可按积分计算,即

$$\vartheta = \int_{-\infty}^{+\infty} |\delta| y \mathrm{d}\delta = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} |\delta| \mathrm{d}\delta$$

或

$$\vartheta = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \delta \mathrm{d}\delta$$

设 $\frac{\delta^2}{2\sigma^2} = x, \delta \mathrm{d}\delta = \sigma^2 \mathrm{d}x$,代入上式得:

$$\vartheta = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}[-\mathrm{e}^{-x}]_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times \sigma$$

$$= 0.797\,9\sigma \approx \frac{4}{5}\sigma \tag{2—20}$$

用残差表示时

$$\vartheta = 0.797\,9\sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}} \approx \frac{4}{5}\sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}} \tag{2—21}$$

根据表 2—5,可知平均误差 ϑ 的含义是:测得值的误差不超出 $\pm\vartheta$ 的置信概率为 57.62%。

3. 几率误差 ρ(概差、或然误差)

几率误差 ρ 的数值是这样确定的,即测得值落入 ρ 以内(测量误差在 $\pm\rho$ 以内)和落在 ρ 之外的概率相等,即

$$2\phi(t) = 50\,\%$$

$$\phi(t) = 25\,\%$$

式中,$t = \frac{\rho}{\sigma}$。由表 2—5 可知,相应的 $t = 0.674\,5$,故

$$\rho = 0.674\,5\sigma \approx \frac{2}{3}\sigma$$

或

$$\rho = 0.674\,5\sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}} \approx \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}} \tag{2—22}$$

所以,与几率误差 $\pm\rho$ 相应的置信概率为 50 %。在自然科学不少领域的科学研究中,用 ρ 来表示随机误差甚为普遍,这主要是由于它的置信概率的数值比较圆整直观的缘故。

4. 极限误差 $\delta_{\lim}$

由表 2—5 可知,当 $t=\pm 3, 2\phi(t)=0.9973$,误差超出 $\pm 3\sigma$ 的概率已很小,因此实用上认为它是误差的极限了,在计量测试中,常用 $\delta_{\lim}$ 来表示随机误差,即

$$\delta_{\lim}=\pm 3\sigma_s=\pm 3\sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}} \tag{2—23}$$

上述 4 个评定精度的指标,在实用中可以任选其中的 1 个,不过在机械制造及精密测量中,应用最广的仍还是标准差 σ_s 及极限误差 $\delta_{\lim}$。

为了简化上列精度评定指标的计算,在数据处理中,还常应用以下的关系式,由式(2—20)

$$\vartheta=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma$$

按定义式平方代人,得:

$$\frac{(\sum|\delta_i|)^2}{n^2}=\frac{2}{\pi}\frac{\sum\delta_i^2}{n} \tag{2—24}$$

又因 v_i 也是随机误差,同样服从正态分布定律,当 n 足够大时,也可写成

$$\frac{(\sum|v_i|)^2}{n^2}=\frac{2}{\pi}\frac{\sum v_i^2}{n} \tag{2—25}$$

式(2—24),(2—25)相除,可得:

$$\frac{(\sum|\delta_i|)^2}{(\sum|v_i|)^2}=\frac{\sum\delta_i^2}{\sum v_i^2}=\frac{n}{n-1}$$

即

$$\sum|\delta_i|=\sqrt{\frac{n}{n-1}}\cdot\sum|v_i|$$

或

$$\frac{\sum|\delta_i|}{n}=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}\cdot\sum|v_i|$$

故得:

$$\vartheta=\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}}\cdot\sum|v_i| \tag{2—26}$$

上式称别捷尔斯(Peters)公式,因 n 足够大时,$\sqrt{n(n-1)}$ 可近似地以 $\left(n-\frac{1}{2}\right)^2$ 代替,所以式(2—26)又可写成如下简化形式:

$$\vartheta=\frac{\sum|v_i|}{n-0.5} \tag{2—27}$$

利用别捷尔斯公式,σ,ρ 及 $\delta_{\lim}$ 可分别表示为

$$\sigma_s=1.2533\times\frac{\sum|v_i|}{n-0.5}\approx\frac{5}{4}\times\frac{\sum|v_i|}{n-0.5} \tag{2—28}$$

$$\rho=0.8453\times\frac{\sum|v_i|}{n-0.5}\approx\frac{11}{13}\times\frac{\sum|v_i|}{n-0.5} \tag{2—29}$$

$$\delta_{\lim}=3.7599\times\frac{\sum|v_i|}{n-0.5}\approx\frac{15}{4}\times\frac{\sum|v_i|}{n-0.5} \tag{2—30}$$

以上4公式提供了由 $\sum|v_i|$ 计算 ϑ,σ_s,ρ 及 $\delta_{\lim}$ 的方法，它较之由 $\sum v_i^2$ 计算要简便些。但是必须指出，以上计算都是只考虑了纯随机误差。实际的测得值中，有时不可能完全消除系统误差，因此残差 v_i 就不是纯随机误差，故由贝塞尔公式出发与由别捷尔斯公式出发计算所得的结果就不能完全相同。若两种方法计算结果相差较大，应该考虑测得值中可能存在系统误差。

例2—5 用百分表式卡尺测量长度共10次，测得的结果如下表，试求 $\sigma,\vartheta,\rho,\delta_{\lim}$。

表 2—7 **例 2—5 数据表**

序号	x_i/mm	v_i/μm	v_i^2/μm²	序号	x_i/mm	v_i/μm	v_i^2/μm²
1	4.74	−10	100	8	4.75	0	0
2	4.78	+30	900	9	4.74	−10	100
3	4.71	−40	1 600	10	4.76	+10	100
4	4.80	+50	2 500	$\sum$	47.50	0	7 000
5	4.72	−30	900				
6	4.77	+20	400		$\bar{x}=4.75$	$\sum\|v_i\|=220$	
7	4.73	−20	400				

解：按贝塞尔公式计算，即由式(2—8)，(2—21)，(2—22)及(2—23)，得：

$$\sigma_s=\sqrt{\frac{7\,000}{9}}=28\ \mu\text{m}$$

$$\vartheta=\frac{4}{5}\sigma=22\ \mu\text{m}$$

$$\rho=\frac{2}{3}\sigma=19\ \mu\text{m}$$

$$\delta_{\lim}=\pm 3\sigma=\pm 84\ \mu\text{m}$$

按别捷尔斯公式计算，即由式(2—27)，(2—28)，(2—29)及(2—30)，得：

$$\vartheta=\frac{220}{9.5}=23\ \mu\text{m}$$

$$\sigma_s=\frac{5}{4}\vartheta=29\ \mu\text{m}$$

$$\rho=\frac{11}{13}\vartheta=20\ \mu\text{m}$$

$$\delta_{\lim}=\pm 3\sigma_s=\pm 87\ \mu\text{m}$$

可见，两组计算结果基本一致。

§2—5 多次重复测量结果的精度指标

一、算术平均值的分布

以上各个评定测量精度的指标，都是对单次测量而言的，若我们把多次重复测量的算术平

均值作为测量结果，显然其精度要比单次测量时高。

由式(2—11)的有关分析已知，n 次重复测量的算术平均值 $\bar{x}_j$ 是服从以真值 x_0 为中心的正态分布，且其标准差 $\sigma_{\bar{x}}$ 比单次测量的标准差 σ 小$\sqrt{n}$倍，即

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

故算术平均值 $\bar{x}_j$ 的分布范围比单次测量测得值 x_i 的分布范围小$\sqrt{n}$倍，即其测量精度提高$\sqrt{n}$倍，如图 2—7 所示。

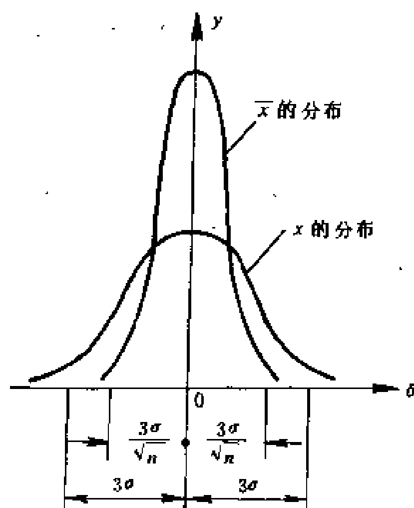


图 2—7

以理论均值 μ 代替被测量的真值x_0，算术平均值 $\bar{x}_j$ 的分布方程可写为

$$y = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}}\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\bar{x}_j-\mu)^2}{2\sigma_{\bar{x}}^2}} \qquad (2—31)$$

与单次测量的情况相似，拉普拉斯函数 $\phi(t)$ 中的变量 $t = \pm 1$ 时 $\left(变量\ t = \frac{\bar{x}_j - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}\right)$，则

$$p[(\mu - \sigma_{\bar{x}}) \leqslant \bar{x} < (\mu + \sigma_{\bar{x}})] = 0.682\,7$$

或

$$p\left[\left(\mu - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \bar{x} < \left(\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right] = 0.682\,7$$

式中的均值 μ 可近似地看作为真值，上式的意义是 $\bar{x}$ 落入区间$\{(\mu - \sigma_{\bar{x}}),(\mu + \sigma_{\bar{x}})\}$的概率为 68.27 %。由此，不难得出 $\sigma_{\bar{x}}$的确切含义：我们可以以 68.27 % 的把握认为$\bar{x}$的误差不超出$\pm\sigma_{\bar{x}}$。故测量结果应表示为

$$\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, p_\alpha = 68.27\ \%$$

当 $t = \pm 3$ 时，相应的测量结果即为

$$\bar{x} \pm \frac{3\sigma}{\sqrt{n}}, p_\alpha = 99.73\%$$

例2—6 测量某工件25次，得 $\bar{x} = 40.021$ mm，$\sigma \approx \sigma_s = 0.002$ mm，若要求置信概率 $p_\alpha = 95\%$，求测量结果。

解：由 $p_\alpha = 95\%$，查拉普拉斯函数表(附录表 1)得：

$$2\phi(t) = 0.95 \qquad 即\ t = 1.96$$

故误差限为 $\pm t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \pm 1.96 \times \frac{0.002}{\sqrt{25}} = \pm 0.000\,8 \approx \pm 0.001$ mm。测量结果为 $\bar{x} \pm t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = (40.021 \pm 0.001)$ mm，$p_\alpha = 95\%$。

然而，当测量次数 n 甚小(例如 $n<20$ 次)时，情况就有所不同，由数理统计的理论可知，此时的统计量为

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_s/\sqrt{n}}$$

式中，$\bar{x}$，μ，σ_s 的意义同前。

新统计量 t 不再服从正态分布，而是服从自由度为 ν（这里 $\nu = n-1$）的学生氏分布，亦称 t 分布，其分布密度函数为

$$y = f(t,\nu) = \frac{\Gamma[(\nu+1)/2]}{(\nu\pi)^{1/2}\Gamma(\nu/2)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} \tag{2—32}$$

式中，$\Gamma(m)$ 为伽玛函数。其表达式为

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} t^{m-1}e^{-t}dt \qquad (m > 0)$$

图 2—8 所示为具有不同自由度数的 t 分布曲线。由图可见，当 $\nu \to \infty$，t 分布就是标准化的正态分布。它的理论均值为

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t,\nu)dt = 0 \tag{2—33}$$

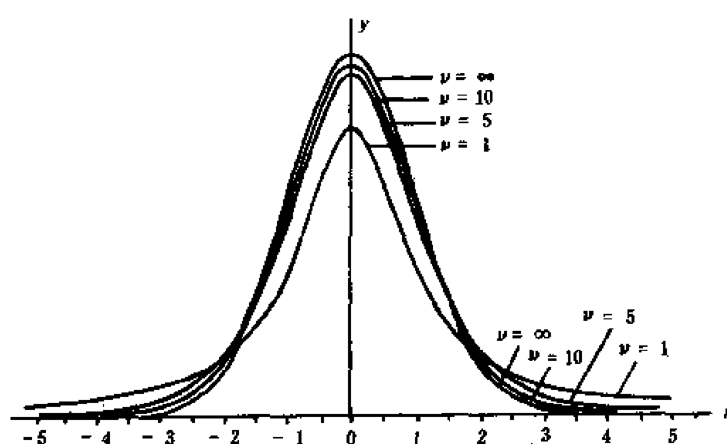


图 2—8

其方差为

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t,\nu)dt = \frac{\nu}{\nu-2}$$

即标准差为

$$\sigma = \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}} \qquad (\nu > 2) \tag{2—34}$$

类似于正态分布的情形，统计量 t 落入区间 $(-t_\alpha, +t_\alpha)$ 中的概率为

$$p_\alpha = 1 - \alpha = 2\int_0^{t_\alpha} f(t,\nu)dt \tag{2—35}$$

p_α 或 α 与 t_α 的对应关系，与参数 ν 有关，具体的数值可查阅附录表 2，其意义可参阅图 2—9。

将误差限与置信概率写成一般的关系式，则为

$$p_\alpha = p\left[\left(\mu - t_\alpha \frac{\sigma_s}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \bar{x} < \left(\mu + t_\alpha \frac{\sigma_s}{\sqrt{n}}\right)\right] \tag{2—36}$$

例 2—7 当测量次数 $n=5$，样本的标准差 $\sigma_s=0.01$ mm，要求的置信概率 $p_\alpha=95\%$，求测量精度。

解： 由 t 分布表(附录表 2)，当自由度 $\nu=n-1=4$ 及 $\alpha=0.05$ 时，查得 $t_\alpha=2.776$。故可计算出测量的误差限

$$\pm t_\alpha \frac{\sigma_s}{\sqrt{n}} = \pm 2.776 \times \frac{0.01}{\sqrt{5}} = \pm 0.012 \approx \pm 0.01 \text{ mm}$$

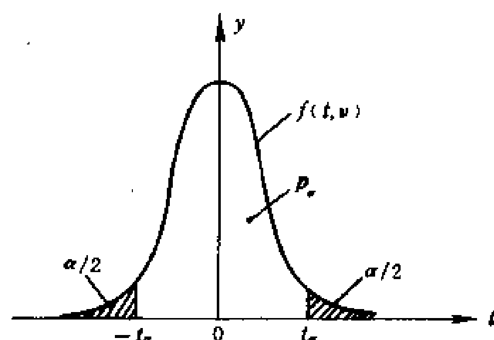


图 2—9

这里值得注意的是，我们在最初分析时，认为随机变量 $\bar{x}$ 或者说统计量 $t=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma_{\bar{x}}}=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 服从正态分布，只是在总体方差 σ^2 为已知的条件下推导得出的。但通常情况下，总体方差 σ^2 往往是未知的，于是只能由有限次测量的 n 个测得值，求出方差的估计值 σ_s^2 或 σ_s。这样，新的统计量 $t=\dfrac{\bar{x}-\mu}{\sigma_s/\sqrt{n}}$ 就不再服从正态分布，而是服从 t 分布了。t 分布在数理统计中称为小子样分布。在精密测量中，通常的测量次数很少有超过 20 次的，因此，在数据处理中，理论上应按 t 分布来计算相应的误差限；只有在测量次数较多($n>20$)的情况时，或其测量不甚重要时，才可近似地应用正态分布的理论来处理。事实上，由式(2—32)可见，在 t 分布的分布密度函数中含有参量 $\nu(\nu=n-1)$，当 n 无限增大时，t 分布曲线与正态分布曲线基本重合，即按两个分布理论来处理测量数据，所得的结果差异是极小的，这也可由比较附录中的拉普拉斯函数表与 t 分布表的临界值 t_α 之后看出来。

二、算术平均值的精度指标

与单次测量精度指标相对应，算术平均值 $\bar{x}$ 的精度评定指标常用的也有 4 个，即

(1) $\bar{x}$ 的标准差 $\sigma_{\bar{x}}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{2—37}$$

(2) $\bar{x}$ 的平均误差 T

$$T = \frac{\vartheta}{\sqrt{n}} = 0.797\,9\,\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{4}{5}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{2—38}$$

(3) $\bar{x}$ 的几率误差 R

$$R = \frac{\rho}{\sqrt{n}} = 0.674\,5\,\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{2}{3}\sigma_{\bar{x}} \tag{2—39}$$

(4) $\bar{x}$ 的极限误差 $\lambda_{\lim}$

$$\lambda_{\lim} = \pm 3\,\sigma_{\bar{x}} \tag{2—40}$$

具体地在计算精度评定指标 $\sigma_{\bar{x}}$，T 和 R 时，也可利用贝塞尔公式或别捷尔斯公式，即

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}} &= \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n(n-1)}} \\ T &= \frac{4}{5}\sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n(n-1)}} \\ R &= \frac{2}{3}\sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n(n-1)}} \end{aligned}\right\} \tag{2—41}$$

或

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}} &= 1.253\,3\,\frac{\sum |v_i|}{n\sqrt{(n-1)}} \approx \frac{5}{4}\cdot\frac{\sum |v_i|}{n\sqrt{(n-1)}} \\ T &= \frac{\sum |v_i|}{n\sqrt{(n-1)}} \\ R &= 0.845\,3\,\frac{\sum |v_i|}{n\sqrt{(n-1)}} \approx \frac{11}{13}\cdot\frac{\sum |v_i|}{n\sqrt{(n-1)}} \end{aligned}\right\} \tag{2—42}$$

例 2—8 如例2—5所列测量数据，求其精度评定指标 $\sigma_{\bar{x}}$，T，R 及 $\lambda_{\lim}$。若要求置信概率 $p_a=0.95$，试确定其测量结果。

解： 今应用贝塞尔公式计算，$n=10$，故

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{10}} = \frac{28}{\sqrt{10}} = 8.9 \approx 9\ \mu\text{m}$$

$$T = \frac{4}{5}\sigma_{\bar{x}} = 7.1 \approx 7\ \mu\text{m}$$

$$R = \frac{2}{3}\sigma_{\bar{x}} = 5.9 \approx 6\ \mu\text{m}$$

$$\lambda_{\lim} = \pm 3\,\sigma_{\bar{x}} = \pm 26.7 \approx \pm 27\ \mu\text{m}$$

由于 $\bar{x}=4.75$ mm，由 t 分布表(附录表 2)，$\nu=9$，$\alpha=0.05$，查得 $t_a=2.26$，故测量结果应为

$$\bar{x} \pm t_a\sigma_{\bar{x}} = 4.75 \pm 2.26 \times 0.009 = (4.75 \pm 0.02)\ \text{mm}$$
$$(p_a = 95\%)$$

表示精度的数字，一般采用一位有效数字已够，只有在很精确的情况下，才采用两位有效数字，且应使测量结果数与精度参数截取有效数字时的末位数要一致，示例如表 2—8。

表 2—8 精度数据的有效位数示例

原始数据形式	结果形式
1 001.77±0.033	1 001.77±0.03
123 357±678	$(1\,234\pm7)\times10^2$
237.465±0.127	237.46±0.13
214.3±0.95	214.3±1.0

至于上列评定精度的各指标，当在测量次数有限的情况下，其本身也带有误差，表征这些指标的精度参数即为其本身的标准差，其计算式为

$$s_{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.707}{\sqrt{n}}\sigma \quad (2-43)$$

在按贝塞尔公式求出的诸参数 ξ(ξ 可代表 σ_{θ}, ρ 或 ϑ),则其标准差为

$$s_{\xi} = \frac{0.707}{\sqrt{n-1}}\xi \quad (2-44)$$

在按别捷尔斯公式计算时,参数的标准差 s_{ξ}' 的算法,可参阅参考文献[15]。

这样,在考虑了精度指标本身误差的情况下,测量的结果应表示为

$$\bar{x} \pm \sigma \pm s_{\sigma},\ p_{\alpha} = 68.27\ \%$$

$$\bar{x} \pm R \pm s_{R},\ p_{\alpha} = 50\ \%$$

例 2—9 将例2—5所列测量数据,采用几率误差 R 及其标准偏差 s_R 表示测量结果。

解: 由例 2—5 及例 2—8,已算出

$$\bar{x} = 4.75\ \text{mm},\ R = 6\ \mu\text{m}$$

由式(2—44),可计算

$$s_R = \frac{0.707}{\sqrt{n-1}}R = \frac{0.707}{\sqrt{9}} \times 6 = 1.4 \approx 1\ \mu\text{m}$$

故测量结果可表示为

$$\bar{x} \pm R \pm s_R = (4.750 \pm 0.006 \pm 0.001)\ \text{mm} \quad (p_{\alpha} = 50\ \%)$$

不过,除非是精度很高的测量中,一般都不需用这种形式来表示测量结果。在本例中,考虑到有效数字,测量结果可写为 4.75 ± 0.01 mm($p_{\alpha} = 50\ \%$)。

§2—6 几种常用的非正态分布

在讨论正态分布的随机误差时,曾指出了这类误差具有有界性、单峰性、对称性和相消性等特征,这些特征表明了随机误差的分布具有一定的规律性,且在多数情况下是服从正态分布的,这已被测量的实践所证实,概率论的中心极限定理也从理论上作了证明。但是,构成中心极限定理的条件并非在所有的情况都得到充分的满足,例如,当组成随机误差的许多因素中有一个或几个因素具有突出的影响时,那么,在此情况下随机误差的分布就会偏离正态性,也即产生非正态分布的随机误差。故在测量误差理论中,除了要讨论正态分布的误差外,还要研究非正态分布的随机误差。

一、评定非正态分布随机误差的方法

非正态分布的随机误差,也具有理论均值 μ 和标准差 σ,它们是评定或处理这类误差的两个基本特征量。类似于正态分布的情况,对于非正态分布,如果分布的概率密度函数为已知,这两个特征量 μ 和 σ,可按概率论中的一阶原点矩和二阶中心矩的开方根来计算。

此外,为了数据处理的需要,还定义了另外两个特征量,即相对不对称系数 α 和相对分布系数 κ。

图 2—10 上实线所画的是非正态分布曲线,即实际分布曲线,它的理论均值为 μ,标准差为 σ,分布范围为 $2t_{\sigma}$。为了数据处理的方便,在与实际分布曲线相同的分布范围上,用虚线画一条正态分布曲线,它的理论均值为 μ_N,标准差为 σ_N,即分布范围为 $2t_N\sigma_N$,一般 $t_N = 3$。为

评定实际分布曲线相对于正态分布曲线的差异程度，定义了相对分布系数 κ●

$$\kappa = \frac{t_N}{t} = \frac{3}{t} \qquad (2—45)$$

式中，t 为实际分布在分布极限处的置信系数。

由图 2—10 可见，由于实际分布是非对称的，故理论均值 μ 与 μ_N 不重合，为评定实际分布的不对称程度，定义相对不对称系数 α，即

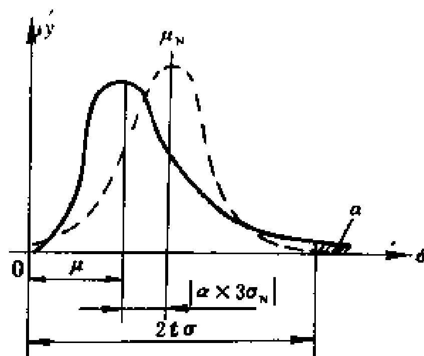


图 2—10

$$\alpha = \frac{\mu - \mu_N}{3\sigma_N} \quad 或 \quad \mu = \mu_N + \alpha \times 3\sigma_N \qquad (2—46)$$

显然，当 $\alpha < 0, \mu < \mu_N; \alpha > 0, \mu > \mu_N$；而当 $\alpha = 0$ 时，$\mu = \mu_N$，即为对称的分布。

这样，对于不对称的非正态分布的分布极限，就可表示为

$$\mu_N \pm 3\sigma_N = \mu - \alpha(3\sigma_N) \pm 3\sigma_N$$

$$= \mu - \alpha t\sigma \pm t\sigma \qquad (2—47)$$

上式就是由非正态分布的特征量表达其分布极限的表示式，式中的第二项，实际上就是实际分布理论均值 μ 相对于折算的正态分布理论均值 μ_N 的偏移量；而头两项（$\mu - \alpha t\sigma$）就是分布范围的中心 μ_N。式(2—47)常用于非正态随机误差的处理中，如随机变量的分布极限计算，零、部件几何尺寸的精度分析，误差的合成等。该表达式的不足之处是只能表示误差限。

表 2—9 列出了机械制造与仪器制造的精密测量中几种常见的分布及其特征量的数值，供误差处理时参考。下面将介绍表中的几种重要分布的特点与应用，至于各种分布概率密度函数的推导，读者可参阅一般的《概率论与数理统计》，本书不再赘述。

二、几种重要的非正态分布

1. 均匀分布

均匀分布亦称等概率分布，即在误差的分布范围内，各处的概率密度相等，其分布密度函数为

$$y = f(\delta) = \frac{1}{2a} \quad (-a \leqslant \sigma < a) \qquad (2—48)$$

其理论均值 μ 和方差 $D(\delta)$ 分别为

$$\mu = \int_{-a}^{a} \delta f(\delta) \mathrm{d}\delta = 0$$

● 有的资料中，κ 的定义式写成 $\kappa = \lambda / \lambda_N$。式中的系数 $\lambda = 1/t, \lambda_N = 1/t_N$，故结果一致。

表 2—9　　几种常见的随机分布

名称	图形	分布密度	分布参数		分布系数		
				标准差 σ	置信系数 t	相对不对称系数 α	相对分布系数 κ
正态分布	$-3\sigma_N$　0　$3\sigma_N$	$f(\delta)=\frac{1}{\sigma_N\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma_N^2}}$ $\lvert\sigma\rvert<\infty$		σ^{*}_{N}	3	0	1
双截尾正态分布	$\frac{1}{2}q$　$\frac{1}{2}q$ $-t\sigma$　0　$t\sigma$	$f(\delta)=\frac{1}{(1-q)\sigma_N\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma_N^2}}$ $-t\sigma\leqslant\delta<t\sigma$	q 0.02 0.06 0.10 0.20	 $0.93\sigma_N$ $0.86\sigma_N$ $0.79\sigma_N$ $0.66\sigma_N$	 2.5 2.2 2.1 1.9	 0 0 0 0	 1.21 1.36 1.44 1.55
均匀分布	$-a$　a	$f(\delta)=\frac{1}{2a}$ $-a\leqslant\delta<a$		$0.58a$	1.73	0	1.73
三角形分布	$-a$　0　a	$f(\delta)=\frac{a+\delta}{a^2}$ $-a\leqslant\delta<0$ $f(\delta)=\frac{a-\delta}{a^2}$ $0\leqslant\delta<a$		$0.41a$	2.45	0	1.22
梯形分布	$-a$　$-b$　0　b　a	$f(\delta)=\frac{\delta+a}{a^2-b^2}$　$-a\leqslant\delta<-b$ $f(\delta)=\frac{1}{a+b}$　$-b\leqslant\delta<b$ $f(\delta)=\frac{a-\delta}{a^2-b^2}$　$b\leqslant\delta<a$	b/a 0.25 0.5 0.75	 $0.42a$ $0.46a$ $0.50a$	 2.38 2.19 1.97	 0 0 0	 1.26 1.37 1.52
直角分布	$-a$　0　a	$f(\delta)=\frac{\delta+a}{2a^2}$ $-a\leqslant\delta<a$		$0.47a$	2.12	$+0.33$	1.41

续表

名称	图　形	分布密度	分布参数		分布系数		
				标准差 σ	置信系数 t	相对不对称系数 α	相对分布系数 κ
双三角分　布	$-a$　0　a	$f(\delta)=-\frac{\delta}{a^2}$ $-a\leqslant\delta<0$ $f(\delta)=\frac{\delta}{a^2}$ $0\leqslant\delta<a$		$0.71a$	1.41	0	2.12
*绝对正态分布	$f(\delta)$　δ　0　$2t\sigma$	$f(\delta)=\frac{1}{\sigma_N\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(\delta-\mu_N)^2}{2\sigma_N^2}}+e^{-\frac{(\delta+\mu_N)^2}{2\sigma_N}}\right]$ $\delta>0$		$\sqrt{\sigma_N^2+\mu_N^2-\mu^2}$	1.2 至 1.26	0.16 至 0.46	2.5 至 2.38
瑞　利分　布	0　$2t\sigma$	$f(\delta)=\frac{\delta}{\sigma^2}e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}$ $0\leqslant\delta<\infty$		$0.66\sigma_N$	2.63	−0.28	1.14
反正弦分　布	$-a$　0　a	$f(\delta)=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-\delta^2}}$ $-a\leqslant\delta<a$		$0.71a$	1.41	0	2.12

*　表中 σ_N 为未截尾正态分布的标准差；对于绝对正态分布，σ_N 为原正态分布的标准差；对于瑞利分布，σ_N 为随机误差的 x 向和 y 向分量正态分布的标准差。μ 为绝对正态分布的均值，μ_N 为其原正态分布的均值。

**　两个分布范围不等的均匀分布的合成误差为梯形分布，梯形的下边与上边分别等于两个分布范围的和与差；因此，两个分布范围相等的均匀分布，其合成误差就是三角分布。

$$D(\delta)=\sigma^2=\int_{-a}^{a}\delta^2 f(\delta)\mathrm{d}\delta=\frac{a^2}{3}$$

$$\sigma=\frac{a}{\sqrt{3}}$$

均匀分布的极限误差为

$$\delta_{\lim}=\pm\sqrt{3}\sigma=\pm a$$

分布密度函数的图形如图 2—11 所示。

在精密测量及某些精密机构中，有时出现均匀分布。如在测量中的瞄准或估读误差，末位数的舍入误差都服从均匀分布；在齿轮传动机构中，由于齿侧间隙所引起的回程误差一般也呈均匀分布。又如在仪器机构中，一些回转件（如齿轮、摩擦轮乃至指示表中的指针）的偏心方向，它在 360°的范围内偏向各个方向上的机会是一样的，即偏心的初相角在 360°范围内的概率密度是服从均匀分布的。

显然，均匀分布是对称的非正态分布，即其

$$\alpha = 0$$

$$\kappa = \frac{3}{\sqrt{3}} = 1.732$$

2. 三角形分布

三角形分布也称辛普生(Simpson)分布，它是由两个相互独立的具有相同分布范围的均匀分布所合成，即随机变量 ξ, η 皆为在 $\left(-\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$ 上均匀分布且独立，则其和就在$(-a, a)$范围内服从三角形分布。其分布密度函数(见图 2—12)为

$$y = f(\delta) = \begin{cases} \frac{a+\delta}{a^2}(-a \leqslant \delta < 0) \\ \frac{a-\delta}{a^2}(0 \leqslant \delta < a) \end{cases} \tag{2—49}$$

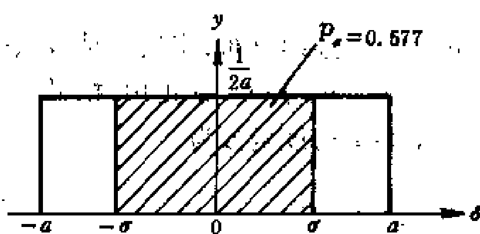


图 2—11

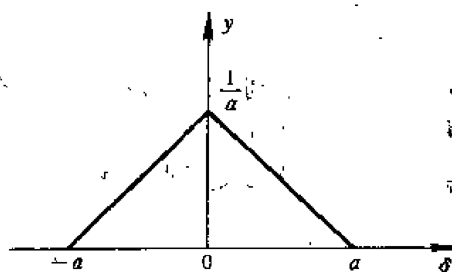


图 2—12

其理论均值 μ 和方差$D(\delta)$分别为

$$\mu = 0$$

$$D(\delta) = \frac{a^2}{6}$$

即

$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

在精密测量或尺寸链计算中，若组成尺寸的误差相等且都服从均匀分布，只要这两个误差彼此独立，则由它形成的封闭尺寸的误差就服从三角形分布。

三角形分布也是对称的非正态分布，其

$$\alpha = 0$$

$$\kappa = \frac{3}{2.45} = 1.22$$

3. 反正弦分布

反正弦分布实际上是一种随机变量函数的分布，若随机变量 δ 是 φ 的正弦函数，即 $\delta = a\sin\varphi$。其中，a 为常数，φ 在区间$(0, 2\pi)$均匀分布，则 δ 就服从反正弦分布，分布密度函数(见图 2—13)为

$$y = f(\delta) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2 - \delta^2}} \quad (-a \leqslant \delta < a) \tag{2—50}$$

它的理论均值 μ 和方差 $D(\delta)$ 分别为

$$\mu = \int_{-a}^{a} \frac{\delta}{\pi\sqrt{a^2 - \delta^2}} \mathrm{d}\delta = 0$$

$$D(\delta) = \int_{-a}^{a} \frac{\delta^2}{\pi\sqrt{a^2 - \delta^2}} \mathrm{d}\delta = \frac{a^2}{2}$$

故
$$\sigma = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

显然
$$\alpha = 0$$

$$\kappa = \frac{3}{1.41} = 2.12$$

在精密测量和仪器结构中，有多种误差服从反正弦分布。例如，仪器度盘偏心所引起的读数误差；又如，在齿轮传动机构中，主动齿轮的偏心方向往往在$(0,2\pi)$区间呈均匀分布，则从动件的位移误差就服从反正弦分布。

4．偏心分布

偏心分布也称瑞利(Rayleigh)分布，它是一种非负的单向连续分布，实质上是服从正态分布的随机变量直角坐标值 x 与 y 变换成极坐标向量半径模 ρ 的分布。射击中，枪弹与靶心的偏心误差 δ 即 ρ 的分布就是典型的例子。偏心误差 δ 的概率密度函数为

$$y = f(\delta) = \frac{\delta}{\sigma_N^2} e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma_N^2}} \quad (0 \leqslant \delta < \infty) \tag{2—51}$$

式中，σ_N 为随机变量在直角坐标值 x 与 y 方向上分量的标准差，即 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_N$。

这时，其理论均值 μ 与方差 $D(\delta)$ 分别为

$$\mu = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_N = 1.253\ \sigma_N$$

$$D(\delta) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma_N^2$$

即
$$\sigma = \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}\sigma_N = 0.655\ \sigma_N$$

由于偏心分布的偏心误差 δ 的标准差 σ 与 σ_N 存在上列确定的关系，故其理论均值 μ 与标准差 σ_N 又可表示为

$$\mu = 1.913\ \sigma$$
$$\sigma_N = 1.526\ \sigma$$

偏心分布的曲线如图 2—14，在分布密度函数式(2—51)中，若令 $W = \dfrac{\delta}{\sigma_N}$，及 $\mathrm{d}W = \dfrac{\mathrm{d}\delta}{\sigma_N}$，则可得到概率分布函数为

$$p_\alpha = p(0 \leqslant W < t) = \int_0^t W e^{-\frac{W^2}{2}} \mathrm{d}W = 1 - e^{-\frac{t^2}{2}}$$

以下列出几种置信概率 p_α 值与其相对应的偏心分布的界限 δ：

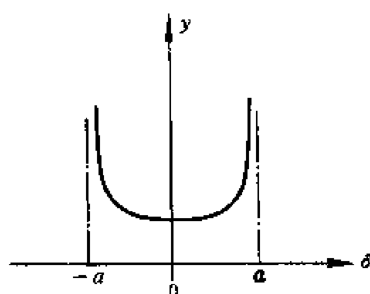


图 2—13

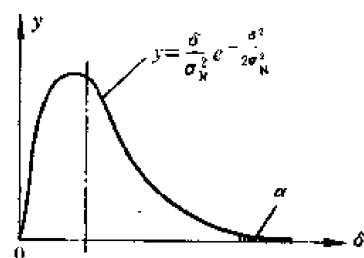


图 2—14

$$p_a = 0.90,\quad t = 2.15, \delta = 2.15\,\sigma_N = 3.28\,\sigma;$$
$$p_a = 0.95,\quad t = 2.45, \delta = 2.45\,\sigma_N = 3.73\,\sigma;$$
$$p_a = 0.99,\quad t = 3.04, \delta = 3.04\,\sigma_N = 4.64\,\sigma;$$
$$p_a = 0.997\,3,\quad t = 3.44, \delta = 3.44\,\sigma_N = 5.25\,\sigma。$$

通常,可认为 5.25σ 即为偏心误差的分布范围,由此就不难计算出偏心分布的相对不对称系数 α 和相对分布系数 κ 分别为

$$\alpha = \frac{\mu - \mu_N}{5.25\,\sigma/2} = \frac{1.913\sigma - (5.25\sigma/2)}{5.25\sigma/2} = -0.28$$

$$\kappa = \frac{3}{2.63} = 1.14$$

例 2—10 检定车床弹簧夹头的定心精度,进行 10 次重复夹紧精密心轴并测量其径向跳动 e,测得的数据及部分处理过程如表 2—10,试求跳动量的平均值$\bar{e}$及最大、最小值。

表 2—10 **例 2—10 数据表**

序　号	径向跳动 $e_i/\mu m$	残差 $v_i/\mu m$	$v_i^2/\mu m^2$	
1	6	1	1	$\bar{e} = \frac{\sum e_i}{n}$
2	4	-1	1	$= \frac{50}{10} = 5\ \mu m$
3	5	0	0	$\sigma_s = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}}$
4	4	-1	1	$= \sqrt{\frac{22}{9}}$
5	3	-2	4	$= 1.6\ \mu m$
6	4	-1	1	
7	7	2	4	
8	5	0	0	
9	8	3	9	
10	4	-1	1	
$\sum$	50	0	22	

解: 由于该误差服从偏心分布,其平均值 $\bar{e} = 5\ \mu m$,相对不对称系数 $\alpha = -0.28$,相对分布系数 $\kappa = 1.14$,由此可算出置信系数 $t = \frac{3}{\kappa} = 2.63$,故径向跳动量 e 的分布范围应为

$$e = (\bar{e} + 0.28 \times 2.63 \times 1.6) \pm 2.63 \times 1.6$$

$$= 5 + 1.2 \pm 4.2 = (6.2 \pm 4.2)\mu m$$

即

$$e_{max} = 10.4\ \mu m$$

$$e_{min} = 2\ \mu m$$

5. 绝对正态分布

绝对正态分布也称正质生产分布，它也是一种常见的不对称分布，在机械制造零件的精密测量中，有一些精度参数常以两个测量值差的绝对值来表示。例如，形位误差中平行度、垂直度、圆度等。这些精度参数都只计算误差的大小，而不计误差的方向，因而这类误差一般都服从绝对正态分布。

今设两个服从正态分布的随机变量 $\delta_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ 及 $\delta_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$，两者的差值 $\delta = \delta_1 - \delta_2$ 也应服从正态分布，显然，其理论均值与方差分别为

$$\mu_N = \mu_1 - \mu_2$$

$$\sigma_N^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

但差值 δ 的绝对值则服从绝对正态分布，其概率密度函数为

$$f(|\delta|) = \frac{1}{\sigma_N\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\delta-\mu_N)^2}{2\sigma_N^2}} + \frac{1}{\sigma_N\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\delta+\mu_N)^2}{2\sigma_N^2}} \qquad (2—52)$$

式中，μ_N 与 σ_N 是两个参量，即差值 δ 分布密度函数的理论均值和标准差。差值绝对值 $|\delta|$ 的理论均值(数学期望) μ 和标准差 σ 为

$$\mu = \frac{2\sigma_N}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu_N^2}{2\sigma_N^2}} + 2\mu_N \Phi\left(\frac{\mu_N}{\sigma_N}\right) \qquad (2—53)$$

$$\sigma^2 = \sigma_N^2 + \mu_N^2 - \mu^2$$

即

$$\sigma = \sqrt{\sigma_N^2 + \mu_N^2 - \mu^2} \qquad (2—54)$$

绝对正态分布曲线如图 2—15 所示，其图形显然与参量 (μ_N/σ_N) 有关，当 $(\mu_N/\sigma_N) = 0$ 时，曲线是纵坐标加倍的右半正态分布曲线；随着 (μ_N/σ_N) 的增加，曲线逐渐向右延伸，并向正态分布的形状转化；当 $(\mu_N/\sigma_N) = 3$ 时，曲线基本上已呈正态分布了。

至于绝对正态分布的置信概率，在参量 μ_N/σ_N 确定后，可按具体的积分限由概率密度函数式(2—52)积分求出，或由差值 δ 的正态分布曲线，用拉普拉斯函数表分段计算，然后相加得出。

理论上，绝对正值分布的特征量比值 μ/σ 与参量 μ_N/σ_N 之间存在确定的关系，故当 μ_N/σ_N 确定后，在一定置信概率下(一般仍可取 $p_a = 0.9973$)，可以计算出置信系数 t，相对不对称系数 α 和相对分布系数 κ，从而按式(2—47)写出其分布极限的表达式。

6. 其他非正态分布

在测量数据处理及统计假设检验中，还常要应用 χ^2 分布，t 分布和 F 分布。实际上它们都是函数的分布。

(1) χ^2 分布(参看附录表 3)

令 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\gamma$ 是 γ 个独立随机变量，每个随机变量都服从标准化的正态分布。定义一个新的随机变量 χ^2 为

$$\chi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_\gamma^2 \qquad (2—55)$$

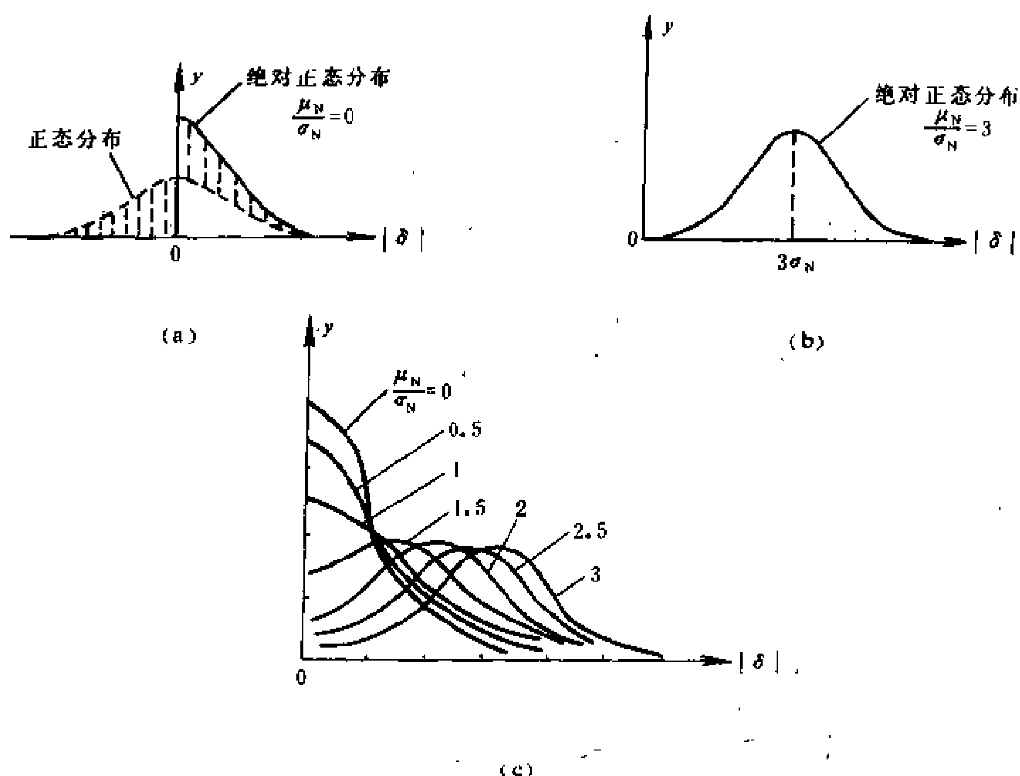


图 2—15

随机变量 χ^2 称为自由度为 γ 的卡埃平方(Chi-square)变量,其主要的分布特征量为

$$\mu = \gamma$$

$$\sigma = \sqrt{2\gamma}$$

在最小二乘法的原理中要应用这种分布的概念,此外,它也是 t 分布和 F 分布的基础。

(2) t 分布

令 ξ 和 η 是相互独立的随机变量,其中 ξ 服从自由度为 γ 的 χ^2 分布,η 服从标准化的正态分布,则定义新的随机变量 t 为

$$t = \frac{\eta}{\sqrt{\xi/\gamma}} \tag{2—56}$$

随机变量 t 称为自由度为 γ 的学生氏 t 变量,其主要的分布特征量为

$$\mu = 0$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma - 2}} \quad (\gamma > 2)$$

t 分布是一种重要的分布,它在数据处理中的应用,前面已经叙述。

(3) F 分布(参看附录表 4)

若 ξ_1 为具有自由度为 γ_1 的卡埃平方变量,ξ_2 为具有自由度为 γ_2 的卡埃平方变量,则定义新的随机变量 F 为

$$F = \frac{\xi_1/\gamma_1}{\xi_2/\gamma_2} = \frac{\xi_1\gamma_2}{\xi_2\gamma_1} \tag{2—57}$$

随机变量 F 称为自由度为 γ_1,γ_2 的 F 变量，其主要的分布特征量为

$$\mu = \frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 2} \quad (\gamma_2 > 2)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\gamma_2^2(\gamma_1 + \gamma_2 - 2)}{\gamma_1(\gamma_2 - 2)^2(\gamma_2 - 4)}} \quad (\gamma_2 > 4)$$

F 分布也是一种重要的分布，它在统计假设检验中经常应用，在回归方程的显著性检验中也是应用 F 分布的原理。

图(2—16)，(2—17)所示为 χ^2 分布与 F 分布的分布曲线。对于 χ^2 分布，由图可见，随着自由度 γ 的增大，分布曲线就向正态分布曲线趋近。

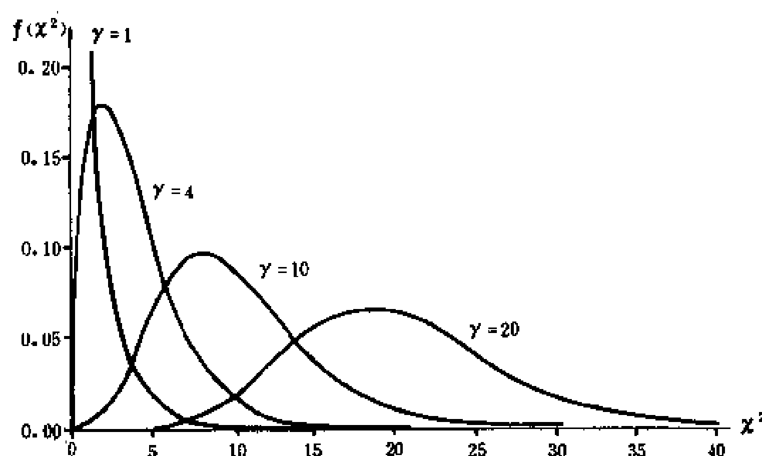


图 2—16

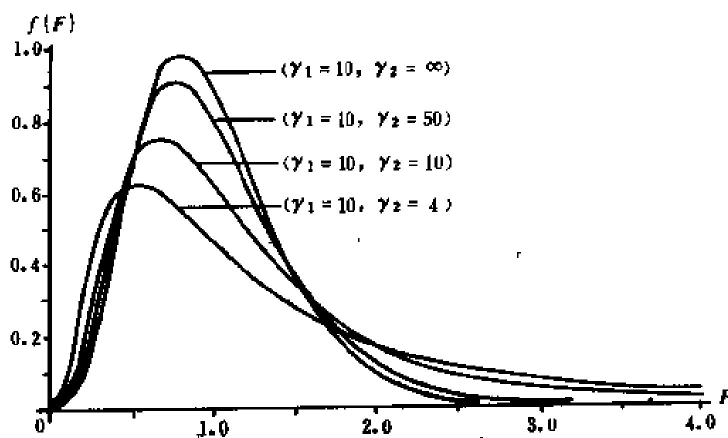


图 2—17

此外，在工程试验中用到的分布还很多，例如，在产品的寿命试验中，常应用韦布尔分布、指数分布；在抽样检查中，用到二项分布、超几何分布等。

§2—7 高斯误差定律

根据随机误差的经验分布曲线，由误差公理，可以推导出理论分布曲线的分布密度方程式。事实上还有其他导出该方程式的方法。

图 2—18 所示是一个实例测量数据的残差分布图，随着测量次数的增加，经验分布曲线应趋向虚线所示的曲线，即正态分布曲线。当测量次数趋于无穷大时，横坐标所表示的残差 v 也就可用真差 δ 来代替。

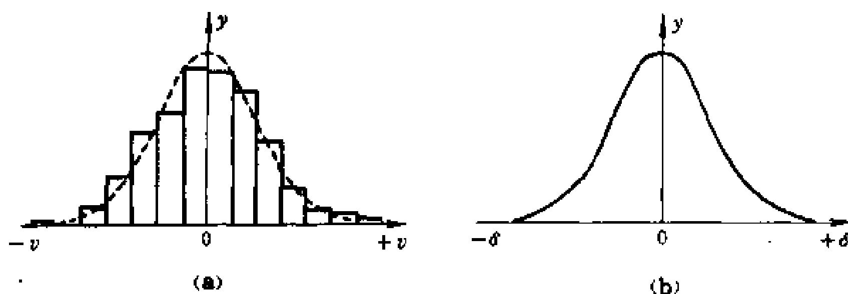


图 2—18

设此曲线的方程式为

$$y = f(\delta)$$

落入区间$(\delta_i, \delta_i + \mathrm{d}\delta)$的概率为

$$p(\delta_i, \delta_i + \mathrm{d}\delta) = f(\delta_i)\mathrm{d}\delta$$

故

$$p(\delta_1, \delta_2) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} f(\delta)\mathrm{d}\delta$$

而总的概率为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\delta)\mathrm{d}\delta = 1$$

既然，$p_i = f(\delta_i)\mathrm{d}\delta$，故有 $p_1 = f(\delta_1)\mathrm{d}\delta, p_2 = f(\delta_2)\mathrm{d}\delta, \cdots, p_n = f(\delta_n)\mathrm{d}\delta$，按概率乘法定理，这些误差同时出现的概率，应为

$$p_\delta = f(\delta_1)f(\delta_2)\cdots f(\delta_n)(\mathrm{d}\delta)^n$$

若已知真值 x_0，则 p_δ 即为这一系列真差 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$ 一起出现的概率。但由于 x_0 为未知，而以其他数来代替，这样将使 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$ 之值发生改变，因而其概率也随之而改变。根据误差公理(2)，需要寻找一个使 p_δ 为最大的数值来代替 x_0，实际上已规定了用 $\bar{x}$ 来代替 x_0，相应地就应以 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 来代替 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$，因此，应使

● 本节内容建议由学生自学。

$$p_v = f(v_1)f(v_2)\cdots f(v_n)(\mathrm{d}v)^n$$

之值为最大,也即须使 $\mathrm{d}p_v/\mathrm{d}\bar{x} = 0$ 。为便于微分,将上式写成对数形式,即

$$\ln p_v = \ln f(v_1) + \ln f(v_2) + \cdots + \ln f(v_n) + n\ln(\mathrm{d}v)$$

微分后得:

$$\frac{\mathrm{d}\ln p_v}{\mathrm{d}\bar{x}} = \frac{\mathrm{d}\ln f(v_1)}{\mathrm{d}v_1}\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\bar{x}} + \frac{\mathrm{d}\ln f(v_2)}{\mathrm{d}v_2}\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}\bar{x}} + \cdots + \frac{\mathrm{d}\ln f(v_n)}{\mathrm{d}v_n}\frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}\bar{x}} = 0$$

因 $v_i = x_i - \bar{x}$,故

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\bar{x}} = \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}\bar{x}} = \cdots = \frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}\bar{x}} = -1$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\ln f(v_1)}{v_1\mathrm{d}v_1}v_1 + \frac{\mathrm{d}\ln f(v_2)}{v_2\mathrm{d}v_2}v_2 + \cdots + \frac{\mathrm{d}\ln f(v_n)}{v_n\mathrm{d}v_n}v_n = 0$$

但

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = 0$$

比较上列两式,可见

$$\frac{\mathrm{d}\ln f(v_1)}{v_1\mathrm{d}v_1} = \frac{\mathrm{d}\ln f(v_2)}{v_2\mathrm{d}v_2} = \cdots = \frac{\mathrm{d}\ln f(v_n)}{v_n\mathrm{d}v_n} = \kappa$$

其中,κ 为常量,故一般可写为

$$\frac{\mathrm{d}\ln f(v)}{v\mathrm{d}v} = \kappa$$

也即

$$\frac{\mathrm{d}\ln f(\delta)}{\delta\mathrm{d}\delta} = \kappa$$

或

$$\mathrm{d}\ln f(\delta) = \kappa\delta\mathrm{d}\delta$$

积分后

$$\ln f(\delta) = \frac{1}{2}\kappa\delta^2 + \ln C$$

即

$$f(\delta) = Ce^{\frac{1}{2}\kappa\delta^2}$$

按误差公理(2),若$|\delta_2|>|\delta_1|$,则 $f(\delta_2)<f(\delta_1)$,这意味着上式的指数为负值,即 $\kappa<0$。令 $\frac{1}{2}\kappa = -h^2$,得:

$$y = f(\delta) = Ce^{-h^2\delta^2} \tag{2—58}$$

因

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\delta)\mathrm{d}\delta = C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\delta^2}\mathrm{d}\delta = 1$$

但

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2\delta^2}\mathrm{d}\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

故常数

$$C = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$$

代入式(2—58)得:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\delta^2} \tag{2—59}$$

此式称随机误差的正态分布律,或称高斯误差定理。式中的参数 h 称为高斯精度标准,因 h 愈大,精度愈高,故可用于判断精度的尺度。但为了判断精度更加直观,一般另定义一个标准差 σ,即

$$\sigma = \sqrt{\frac{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2}{n}}_{n \to \infty}$$

或
$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^2 y \mathrm{d}\delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-h^2\delta^2} \delta^2 \mathrm{d}\delta$$

但
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-h^2\delta^2} \mathrm{d}\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$$

两边对 h 微分

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-h^2\delta^2} 2h\delta^2 \mathrm{d}\delta = -\frac{\sqrt{\pi}}{h^2}$$

或
$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-h^2\delta^2} \delta^2 \mathrm{d}\delta = \frac{1}{2h^2}$$

故
$$\sigma^2 = \frac{1}{2h^2}$$

即
$$h = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$$

代入式(2—59),最后得

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}} \qquad (2—60)$$

第三章　系　统　误　差

§3—1　基本概念

系统误差的性质是固定不变或按一定的规律变化。对待系统误差的基本措施是要设法发现并予以消除。

一、系统误差的类别

系统误差按其表现形式可分为以下几类：

1．定值系统误差

在同一测量条件下，多次重复测量同一量值时，误差的绝对值和正负符号恒定不变，这种误差就叫作定值系统误差。如刻度尺不准确，千分尺未校准零位，都将对测量结果引入定值系统误差(图 3—1a)。

2．变值系统误差

在多次重复测量同一量值时，由于在测量过程中，测量条件有变化，而使误差的绝对值和正负符号按一定规律变化的误差，叫作变值系统误差。它又分为以下几种类型：

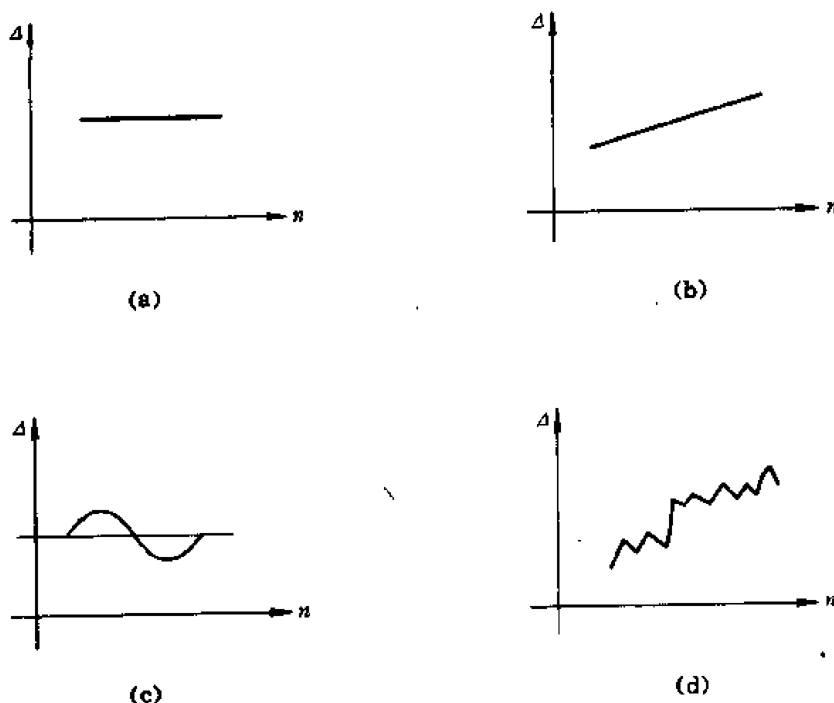


图　3—1

Δ—系统误差；n—测量顺次

(1) 累进(线性)系统误差

误差随测量过程的时间(或被测量值)的延伸而呈线性递增或递减。如测量过程中温度呈线性变化引起的误差;刻度均匀地增大所引起的误差(图 3-1b)。

(2) 周期误差

误差按周期规律变化,最常见的为正弦周期误差。如千分表指针轴与刻度盘有偏心;测量机构中大多数齿轮传动引起的误差,都是正弦周期误差(图 3-1c)。

(3) 复杂系统误差

误差的变化规律比较复杂。如导轨的直线度误差;刻度分划不规则的示值误差。这类误差可用实测经验曲线来表示(图 3-1d)。

还有一种不定系统误差,即误差的大小和正负符号都未知(或其中之一未知),但可估计误差的大小范围。如用"等"的量块作微差比较测量,量块的具体检定误差是一未知的定值,其对测量结果的影响是属系统误差,但误差大小只能估计出一定范围(量块的检定误差)。这种误差,按习惯是当作随机误差来处理。

二、系统误差对测量结果的影响

定值系统误差只影响一系列重复测得值的算术平均值 $\bar{x}$,对测得值的残差 v_i 没有影响,即不影响随机误差的分布规律和精度参数(图 3—2)。设每一测得值 x_i 都有一定值系统误差 Δ_0,则实测值为 $x_i' = x_i + \Delta_0$,其平均值 $\bar{x}'$ 为

$$\bar{x}' = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i'}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i + \Delta_0)}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \frac{n\Delta_0}{n} = \bar{x}_i + \Delta_0$$

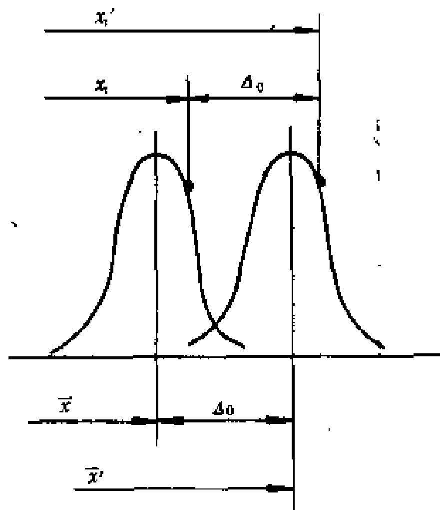


图 3—2

而残差 v_i' 为

$$v_i' = x_i' - \bar{x}' = (x_i + \Delta_0) - (\bar{x}_i + \Delta_0)$$

$$= x_i - \bar{x}_i = v_i$$

故对测得值的残差无影响。

变值系统误差则不然,由上两式可知,如 Δ_0 为变值,它对 $\bar{x}$ 及 v_i 都有影响,既影响分布规律,也影响标准差 σ_s 等精度参数值。

§3—2 系统误差的发现方法

在精密测量中,对比较显著的系统误差,应细致敏锐地查找其产生的原因和变化规律,否则不但不能对系统误差进行修正和消除,甚至还不知道是否有误差存在。尤其是变值系统误差,它将歪曲随机误差的分布规律,使对随机误差不能进行正确的分析和估算,故应引起高度重视。

下面介绍一些如何从测得结果的数据中分析发现系统误差的方法。

一、定值系统误差的发现方法

定值系统误差不影响测得值的残差，它对重复测量的每一结果的影响相同，故从测量列的原始数据本身，看不出有无定值系统误差存在，但可用以下方法来发现。

1. 对比检定法

要判断某一测量条件下是否有定值系统误差，在确信没有明显变值系统误差（可用后面介绍的方法来发现和消除）的前提下，可以改用更好的测量条件（如改用更高精度的仪器或基准），进行检定性测量。以此两种不同的测量条件对同一量值进行次数相同的重复测量，求出两者算术平均值之差，则该差值即为被判断的测量条件下的定值系统误差，因为两种不同测量条件具有相同的系统误差的可能性是很小的。

对量块，标准环等进行检定，以发现其定值系统误差并据以确定修正值，就是对比检定法的具体应用。

2. 均值与标准差比较法

对同一量值在测量条件不同，测量次数也不同的情况下进行两组（或多组）测量。设测量次数分别为 n_1 和 n_2 次，得两组平均值 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 为

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{n_1}\sum x_{1i};\quad \bar{x}_2 = \frac{1}{n_2}\sum x_{2j}$$

如果测量条件稳定，没有明显的变值系统误差，且都服从正态分布，则两列测得值的分布中心（数学期望）均将为理论均值 μ，而 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 都将为 μ 的近似值。因为 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 也是随机变量，所以两者之间总会有些差异。根据 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 的近似程度，结合两者差异发生的概率，便可大致确定两组测得值是只含有随机误差，还是也伴有定值系统误差存在。

两列测得值的方差估计值为

$$\sigma_{s_1}^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum (x_{1i} - \bar{x}_1)^2;\quad \sigma_{s_2}^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum (x_{2j} - \bar{x}_2)^2$$

平均值 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 的方差估计值为

$$\sigma_{\bar{x}_1}^2 = \frac{\sigma_{s_1}^2}{n_1};\qquad \sigma_{\bar{x}_2}^2 = \frac{\sigma_{s_2}^2}{n_2}$$

两平均值之差的方差为

$$\sigma_{\Delta\bar{x}}^2 = \sigma_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)}^2 = \sigma_{\bar{x}_1}^2 + \sigma_{\bar{x}_2}^2 \text{●} \tag{3—1}$$

由于 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 是服从正态分布的随机变量，故其差值 $\Delta\bar{x} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ 也服从正态分布（其分布的平均值为零，方差为 $\sigma_{\Delta\bar{x}}^2$）。因此，可用区间的概率估计原理来判断是否有定值系统误差，即

$$p(-t\sigma_{\Delta\bar{x}} \leqslant \bar{x}_1 - \bar{x}_2 < t\sigma_{\Delta\bar{x}}) = p_a$$

p_a 为与 t 对应的概率值，也可写成

$$p_a = p(|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| < t\sigma_{\Delta\bar{x}})$$

● 此式的推导将在第六章讲解。

在给定置信概率 p_α 时，若无定值系统误差，则 $|\bar{x}_1-\bar{x}_2|$ 应不超出 $t\sigma_{\bar{x}}$。如已超出，则可认为 $\bar{x}_1$ 与 $\bar{x}_2$ 的差异不只是受随机误差影响，而且还有定值系统误差存在，因为在不同测量条件下，得到的 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 具有相同的系统误差的可能性是非常微小的。这样判断的置信概率为 p_α。

例 3—1 在不同条件下测某一尺寸，第一组测得的 $\bar{x}_1=10.023\,6$ mm，$\sigma_{\bar{x}_1}=0.2$ μm；第二组测得的 $\bar{x}_2=10.024\,8$ mm，$\sigma_{\bar{x}_2}=0.2$ μm。试判断其间有无定值系统误差（已知无变值系统误差）。

解： $|\bar{x}_1-\bar{x}_2|=|10.023\,6-10.024\,8|=0.001\,2\ \text{mm}=1.2\ \mu\text{m}$，此两平均值之差的标准差为

$$\sigma_{\Delta\bar{x}}=\sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2+\sigma_{\bar{x}_2}^2}=\sqrt{(0.2)^2+(0.2)^2}\approx 0.3\ \mu\text{m}$$

按正态分布，如取置信概率为 99%，则 $t=2.58$，故

$$t\sigma_{\Delta\bar{x}}=2.58\times 0.3=0.77\ \mu\text{m}$$

$$|\bar{x}_1-\bar{x}_2|>t\sigma_{\Delta\bar{x}}$$

故有根据判断两组测得值（或其中一组）含有定值系统误差，应查找根源并予以消除或修正。

当测量次数 n_1 和 n_2 较少时，可按 t 分布来判断。

随机量 $t=\dfrac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{\sigma_{\Delta\bar{x}}}$ 符合 t 分布。

$$\sigma_{\Delta\bar{x}}^2=\frac{(n_1+n_2)[(n_1-1)\sigma_{s_1}^2+(n_2-1)\sigma_{s_2}^2]}{n_1n_2(n_1+n_2-2)}$$

$$=\frac{(n_1+n_2)\left[\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2+\sum_{j=1}^{n_2}(x_{2j}-\bar{x}_2)^2\right]}{n_1n_2(n_1+n_2-2)} \tag{3—2}$$

式中，(n_1+n_2-2) 为自由度。公式证明可参阅参考文献[11]。式中各符号均同前。

在判断有无定值系统误差时，按 t 分布取置信概率。现举例如下。

例 3—2 用两台不同的仪器测量轴径，得两列测得值如表 3—1。试判断其中有无定值系统误差。

表 3—1 **例 3—2 数据表** (mm)

x_{1i}	14.16	14.16	14.20	14.16	14.20	14.17	14.15	14.21	
x_{2j}	14.17	14.27	14.18	14.25	14.27	14.20	14.23	14.27	14.17

解：

$$\bar{x}_1=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}x_{1i}=14.176\ \text{mm}\ (n_1=8)$$

$$\bar{x}_2=\frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2}x_{2j}=14.223\ \text{mm}\ (n_2=9)$$

$$\sum_{i=1}^{n_1}(x_{1i}-\bar{x}_1)^2=3\,788\ \mu\text{m}^2$$

$$\sum_{j=1}^{n_2}(x_{2j}-\bar{x}_2)^2=15\,361\ \mu\text{m}^2$$

按式(3—2),则

$$\sigma_{\Delta\bar{x}}^2 = \frac{(8+9)\times(3\ 788+15\ 361)}{8\times 9\times(8+9-2)} = 301.42\ \mu\text{m}^2$$

$$\sigma_{\Delta\bar{x}} = \sqrt{301.42} = 17.4\ \mu\text{m}$$

自由度 $\nu = n_1 + n_2 - 2 = 15$,取置信概率 $p_a = 0.99$,查附录表2得 $t = 2.95$。

此时,$\Delta\bar{x}$ 的随机误差限为

$$t\sigma_{\Delta\bar{x}} = 2.95\times 0.017\ 4 = 0.051\ \text{mm}$$

$$|\Delta\bar{x}| = |\bar{x}_1 - \bar{x}_2| = 14.223 - 14.176 = 0.047\ \text{mm}$$

$$\Delta\bar{x} < t\sigma_{\Delta\bar{x}}$$

故可判断测量中没有定值系统误差。

在判断测量中有系统误差存在时,有时还会有新的发现。如化学家雷莱(Rayleigh)曾从不同来源用不同方法制取氮气。由化学方法制得的氮,其平均密度和标准差分别为2.299 71和0.000 41,从大气中提取氮分别为2.310 22和0.000 19。

$$\Delta\bar{x} = 2.310\ 22 - 2.299\ 71 = 0.010\ 51 \approx 0.01$$

$$\sigma_{\Delta\bar{x}} = \sqrt{0.000\ 41^2 + 0.000\ 19^2} = 0.000\ 45$$

取置信概率 $p_a = 99.73\%$ 来判断,则

$$\Delta\bar{x} \gg 3\sigma_{\Delta\bar{x}} = 0.001\ 35$$

故可判断其中一定有系统误差,经检查由于操作技术等明显因素产生系统误差的可能性很小,进一步仔细分析,结果发现了惰性气体的存在。

二、变值系统误差的发现方法

前面已经讲到,变值系统误差不但影响测量列数据的算术平均值 $\bar{x}$,还将影响各测得值的残差 v_i 及其分布规律。因此,可通过分析观察残差 v_i 的变化情况,或检验它是否服从预知的分布规律(一般是正态分布),来发现变值系统误差。下面介绍常见的一些具体方法。

1. 残差观察法

当系统误差明显地大于随机误差时,将测得值按测量的先后顺序列出(如图3—3),算出全部残差 v_i,通过观察 v_i 按测量顺序的变化情况(大小和正负符号的变化),可判断有无变值系统误差以及其类型属哪一种。

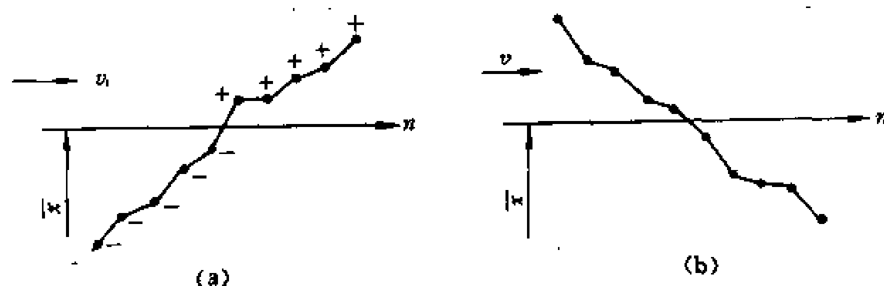


图 3—3

(1) 若残差 v_i 按近似的(从整体看)线性规律递增(图3—3a)或递减(图3—3b),则可判断测量结果中存在线性(累进)系统误差。直接观察测得值的变化情况也可判断,但不如观察残差方便和醒目。

例3—3 测量一尺寸,将连续获得的测得值按先后顺序列于表3—2。试判断其中是否含有系统误差。

表3—2 **例3—3数据表**

测量顺序	测得值 x_i/mm	残差 v_i/μm $v_i = x_i - \bar{x}$	数值变化	符号变化
1	34.588	-6	小 ↓ 大	(-)
2	34.589	-5		
3	34.588	-6 $\sum v_{i前} = -23$		
4	34.590	-4		
5	34.592	-2		
6	34.594	0		(0)
7	34.596	+2		(+)
8	34.600	+6 $\sum v_{i后} = +23$		
9	34.600	+6		
10	34.603	+9		
$n = 10$	$\bar{x} = 34.594$			

从表中可以看出,数据明显地由小递增变大,故其中含有线性系统误差。

(2) 若残差 v_i 的正负符号近似按正弦(或其他形式)的周期规律变化,即符号变化为 +(-)→0→-(+)→0→+(-),周而复始(测量次数太少显示不出来),且变化的幅值也比较明显,则说明存在周期系统误差。

采用残差观察法,最好结合检查产生误差的原因来分析。产生线性系统误差的原因,常常是与时间成比例变化的一些因素造成的,如温度随时间的变化;量仪中测量链的某些环节因紧固或联结不牢而产生近似等速的蠕动爬行等。有的线性系统误差,是随被测量值的增大而增大的形式表现出来,如刻尺的系统刻划误差;测微螺旋中的螺距累积误差等。

周期误差一般多呈正弦规律,其产生原因主要是由于各种偏心引起的,如度盘偏心、表类仪器的指针偏心等(图3—4)。

(3) 当测量列数据不多时,用观察残差的方法,是难以确定复杂系统误差是否存在及其存

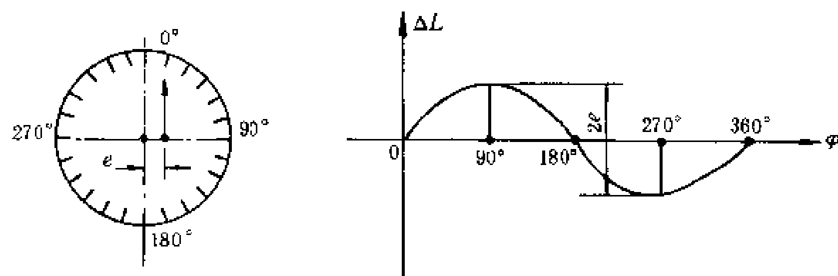


图 3—4

在的规律的。当测量次数足够多时(如 $n=200$ 次),可画出频率分布图(直方图),看是否符合预期的随机误差分布规律(一般为正态分布),如基本上符合,则表明没有变值系统误差。很明显,这样做很麻烦,而且要用具有很高精度和灵敏限的量仪。对待复杂系统误差,应从误差根源上加以检查、控制或校正。

2. 残差核算法

(1) 前后分组核算法

将测得值按测量先后顺序排列,如表 3—2。将前后各半分为两组,其残差的代数和$\sum v_{i前}$与$\sum v_{i后}$之差相对 v_i 来说若明显地不接近于零,则可判断其中含有线性系统误差。如表 3—2 中有

$$\sum v_{i前} - \sum v_{i后} = -23 - (+23) = -46\ \mu m$$

明显地不接近于零,故可判断其中含有线性系统误差。因为含有线性系统误差的测量列,其测得值的算术平均值是在测量值顺序的中点附近,所以前后两组残差的代数和$\sum v_{i前}$与$\sum v_{i后}$,总是大小接近相等而符号相反(总和$\sum v_i = \sum v_{i前} + \sum v_{i后} \approx 0$)。因此,$\sum v_{i前} - \sum v_{i后}$将明显地不接近于零。

要指出,测量列中如存在周期系统误差,而按顺序排列的第一个测得值的残差恰好等于零或接近于零,如位于图 3—5 中的 0,A 或 B 点及其附近,则在一周期范围内考虑,$\sum v_{i前}$与$\sum v_{i后}$之差亦将明显地不接近于零。故用此法时,最好与前面介绍的残差观察法相互配合来判断。

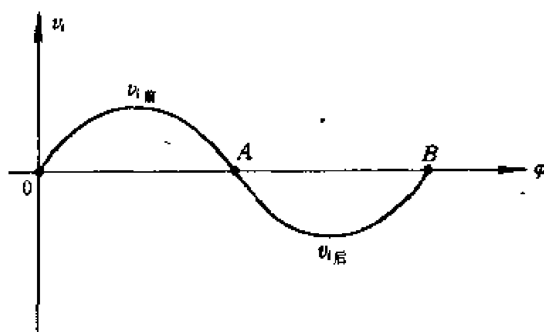


图 3—5

(2) 阿贝检验法

阿贝检验法的依据,也是检查测量列的残差是否符合正态分布规律。下面只介绍此法的具体用法,方法的原理推证可参阅文献[3][14]。

将测量列的残差按测量顺序编号排列为

$$v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$$

设

$$A = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2$$

$$B = (v_1 - v_2)^2 + (v_2 - v_3)^2 + \cdots + (v_{n-1} - v_n)^2 + (v_n - v_1)^2$$

如有

$$\left|\frac{B}{2A} - 1\right| > \frac{1}{\sqrt{n}} \tag{3—3}$$

则可判断测量结果中含有变值系统误差,但类型不能判定。

仍以表 3—2 中的数据为例,由表中数据可求得 $A=274$,$B=268$。按式(3—3)有

$$\left|\frac{B}{2A} - 1\right| = \left|\frac{268}{274 \times 2} - 1\right| \approx 0.5$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0.3 < 0.5$$

故可判断测量列中含有变值系统误差。

3. 不同公式核对法

第二章中已介绍求标准差 σ_s 的白塞尔公式和别捷尔斯公式,即

$$\sigma_{s_B}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}}$$

$$\sigma_{s_p}=1.253\frac{\sum_{i=1}^{n}|v_i|}{\sqrt{n(n-1)}}$$

式中：v_i——残差；

n——测量次数。

当测量次数 n 有限时，按以上两式计算出来的 σ_{s_B} 和 σ_{s_p} 会有一定的差异（当 $n\to\infty$ 时，$\sigma_{s_B}\to\sigma_{s_p}$）。

令
$$\frac{\sigma_{s_p}}{\sigma_{s_B}}=1+u \tag{3—4}$$

若测量列服从正态分布，则参数 u 也服从正态分布，并有标准差 σ_u：

$$\sigma_u=\frac{1}{\sqrt{n-1}} \tag{3—5}$$

于是，可用 $|u|\geqslant Z\sigma_u$ 作为判断测量列中存在变值系统误差的准则，但误差的类型不能判定。如取置信概率为99.73%，则当 $|u|\geqslant\frac{3}{\sqrt{n-1}}$ 时，即表明存在变值系统误差（证明可参阅有关文献，如[1]，[14]）。

以上介绍的方法，都有一定的局限性，特别是当测量数据不完全服从正态分布，测量次数又较少时，判断的准确性就受影响。但这些方法对测量工作还是具有参考价值的。

§3—3 系统误差的减小和消除

消除和减小系统误差的途径有以下3个方面：① 从误差根源上消除；② 在测量过程中采取一定措施，避免系统误差引入测量结果；③ 设法掌握系统误差的具体大小数值，从测量结果中修正，如量块、线纹尺等采用修正值。

下面主要从①、②两个方面作进一步的介绍。应该指出，系统误差的消除，只能达到一定限度，限度以外的微小误差，已具有随机性质，一般可归入随机误差来处理。

一、从误差根源上消除系统误差

要消除系统误差，关键是如何查找误差根源，找到了误差根源，消除或修正它就比较容易了。

在进行精密测量之前，应先对所采用的原理和方法以及量具仪器、环境条件等作一全面的检查和了解，明确其中有无产生明显系统误差的因素，并采取相应措施予以修正或消除。由于具体条件不同，所以在分析查找误差根源时，并无一成不变的方法，但以下几方面总是应予考虑的。

(1) 所用基、标准件（如量块、刻尺、光波波长等）是否准确可靠，有无修正值，如有，则应据以修正测量结果。

(2) 所用量具仪器是否处于正常的工作状态，是否按规定期限进行检定，使用前和使用过程中有无异变或事故。

(3) 仪器的调整、测件的安装定位和支承装卡是否正确合理。

测量时，应正确选择测量基准，尽量遵守基准统一原则，即工序检测应以工艺基准作为测量基准，终检时应以设计基准作为测量基准。有时由于受被测件结构形状或测量条件的限制，不能满足基准统一的要求，这时可进行分析及计算，必要时，应对安装定位误差进行修正。

对重量较大的细长被测件，如丝杠、大尺寸量块等，在安装定位时，要考虑因自重而在测量中产生的力变形。为减小力变形引起的误差，对截面大小和材质都比较均匀的被测件，应按"艾利点"来支承测件，即两支承点设在距两端的距离 a 约为 $(2/9)L$ 处（L 为被测件全长），如图 3—6 所示。必要时，还可加辅助支承。

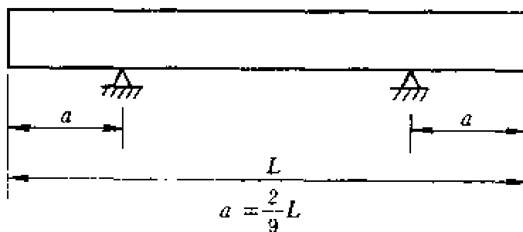


图 3—6

根据材料力学的分析计算，对变形要求不同的被测件，上述两支承点的位置可精确确定，如表 3—3（图 3—6）。

表 3—3 **支承点位置**

要　求	举　例	支承点位置
被测件中性面变形最小	检线纹尺等	$a = 0.220\,3\,L \approx \frac{2}{9}L$
两端面平行度变化最小	检测大尺寸量块等	$a = 0.211\,3\,L \approx \frac{4}{19}L$
中间与两端挠度最小	测丝杠等	$a = 0.223\,2\,L \approx \frac{2}{9}L$

(4) 所采用的测量方法和计算方法是否正确，有无原理误差；在数据处理过程中有没有误算和疏漏，对重要的计算，应反复核查。

(5) 测量场所的环境条件是否符合规定要求，特别是温度变化的影响，尤为重要。在一般生产车间，对尘污、振动也应予以足够注意，至于气压、空气折射率等，只是在要求特别高的测量中才考虑修正（如用绝对干涉仪检一等量块，用激光光波比长仪检线纹尺等）。

测量时，实际温度偏离标准温度（+20℃）所引起的误差为

$$\Delta L = L[(\alpha_2 - \alpha_1)(t_2 - 20℃) + \alpha_1(t_2 - t_1)] \tag{3—6}$$

式中：　L——被测长度；

t_1, α_1——量具仪器或标准件的温度和线膨胀系数；

t_2, α_2——被测件的温度和线膨胀系数。

对形状简单的被测件、标准件和量具仪器，可用上式对测量结果作温度误差（定值系统误差）的近似修正。但一般被测件和量具仪器的形状并不那样简单，材质也不很均匀，所以实际上热胀冷缩不是简单的线性规律，加之线膨胀系数和温度的测量不精确，所以难以进行可靠的误差修正。对精密测量，一般都采取恒温措施，即将环境温度控制在 +20℃ 附近。温度在恒温允许的小范围内仍有波动时，已属随机误差，应另按下式计算：

$$\Delta L = L\sqrt{(\alpha_2 - \alpha_1)^2(t_2 - 20℃)^2 + \alpha_1^2(t_2 - t_1)^2} \tag{3—7}$$

在恒温条件下，还要注意局部热源的影响。为了减小测量人员体温的影响，可采用隔热罩、隔热手柄，用长杠杆及长镊夹等工具进行操作，有时还要限制恒温室内的人数。对仪器的光源和电源，可采用散热和冷却措施，还可用瞬时照明方式，即光源在测量读数时接通，很短时

间后即自行熄灭。电源也可用时间继电器，以便在短时间使用供电后自行断电。

(6) 注意避免测量人员带入主观误差，如视差，视力疲劳、注意力不集中等引起的误差。重要的精密测量，测量人员应具备较高的水平和经验。

二、在测量过程中消除系统误差的常用方法

1. 定值系统误差的消除方法

(1) 抵消法(反向补偿法)

当已知有某种产生定值系统误差的因素存在，而又无法从根源上消除，也难以确定其大小并从测量结果中修正时，可考虑有否可能用抵消法消除。先在有定值系统误差的状态下进行一次测量，再在该定值系统误差影响相反的另一状态下再测一次，取两次测量的平均值作为测量结果，这样，大小相同但符号相反的两定值系统误差就在相加后再平均的计算中互相抵消了。

在工具显微镜上测螺纹的螺距、半角等参数，就是采用抵消法来消除定值系统误差的典型例子，如测 3 个螺距值 P(图 3—7)，左右各测一次，得 $P_{左}$ 与 $P_{右}$(正确值为 P)。

$$P_{左}=P+\Delta,P_{右}=P-\Delta$$

式中：Δ 为仪器两顶尖不同心使被测螺纹件偏斜而产生的定值系统误差，将 $P_{左}$、$P_{右}$ 平均后，Δ 即抵消。

$$\frac{P_{左}+P_{右}}{2}=\frac{(P+\Delta)+(P-\Delta)}{2}=P$$

(2) 标准量替代法

这种方法是在一定的测量条件下，对某一被测量值进行测量，使在仪器上得到某一种状态(如指针指示零位、电桥平衡、天平平衡等)，再以同样性质的标准量值代替被测量值，调整标准量值的大小，使在仪器上呈现出与前者相同的状态，则此时的标准量值即等于被测量值。由于两次测量都在量仪上呈现同一状态，故一切定值系统误差 $\sum\Delta_i$ 的影响相同，这样就消除了除标准量值本身的定值误差(可考虑检定修正)以外的一切定值系统误差。即

$$x_{标准}+\sum\Delta_i=x_{被测}+\sum\Delta_i(同一示值状态)$$

所以

$$x_{标准}=x_{被测}$$

替代法对大小可连续改变的标准量，使用尤为方便。图 3—8 是用电桥测电阻的例子，测量步骤如下：

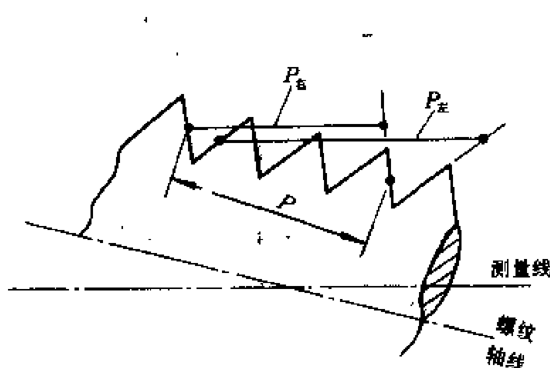


图 3—7

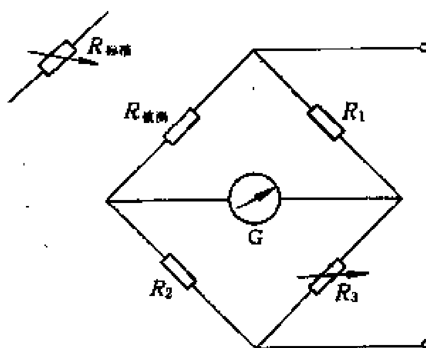


图 3—8

① 调整 R_3 使电桥平衡，电表 G 指零。

② 以 $R_{标准}$ 代替 $R_{被测}$，调 $R_{标准}$ 使电桥再次平衡，此时即有

$$R_{标准}=R_{被测}$$

(3) 交换法

这种方法是在一次测量后，将某些测量条件交换一下，以消除定值系统误差。

图 3—9 是用等臂天平称量重物 x，第一次测量是用砝码 P 使天平平衡。即有

$$x=\frac{l_2}{l_1}P$$

再将 x 与 P 交换位置（x 在右方，P 在左方），如 $l_1\neq l_2$（定值系统误差来源），砝码将略有增减，即由 P 换为 $P'=P+\Delta P$，才能使天平再次平衡。于是有

$$P'=\frac{l_2}{l_1}x$$

即

$$x=\frac{l_1}{l_2}P'$$

两式相乘得：

$$x=\sqrt{PP'}$$

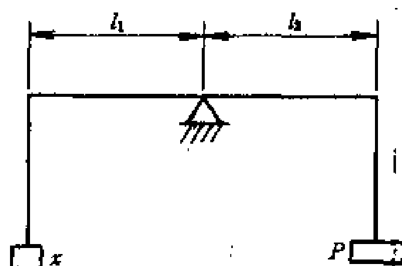


图 3—9

2. 线性系统误差的消除方法

(1) 对称测量法

线性系统误差一般多随时间呈线性变化，因此，将测量顺序对某一时刻对称地进行测量，再通过计算，即可达到消除线性误差的目的。

如测量按图 3—10 的时间顺序取值，将时间按以下条件安排：

① $t_5-t_4=t_2-t_1$；

② t_1 与 t_5，t_2 与 t_4 都对称于 $t_3(t_{中})$。则有

$$\frac{\Delta l_1+\Delta l_5}{2}=\frac{\Delta l_2+\Delta l_4}{2}=\Delta l_3$$

利用此规律即可消除线性系统误差。

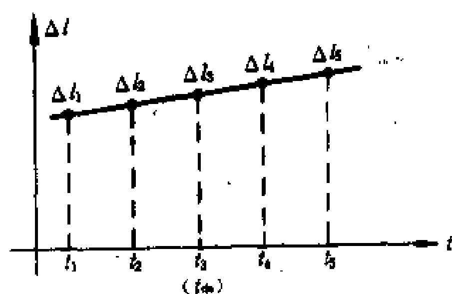


图 3—10

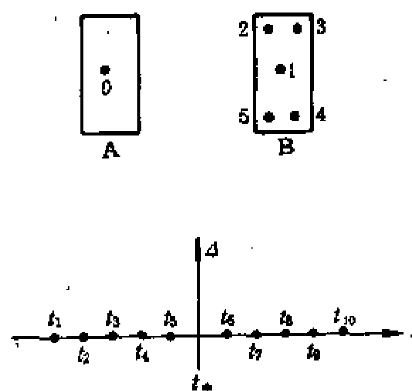


图 3—11

例如，用比较测量法检定量块的平面平行性（图 3—11），先以高"等"的标准量块 A 的中心对好仪器零位，然后在被检量块 B 上按图中顺序 1（中心）→2→3→4→5 的位置上测量，再按 5→4→3→2→1 的顺序倒过来复测一次，每点都取两次测量的平均测得值作为结果。这种方法是检定规程规定的测量方法。

由于一般检定人员的操作节奏比较均匀，基本上可以保证 $t_5-t_4=t_4-t_3=t_3-t_2=t_2-t_1$ 和 t_5 与 t_6，t_4 与 t_7，…，t_1 与 t_{10} 都对称于 $t_{中}$。因此，可消除测量过程中可能产生的线性系统误差。

很多随时间变化的系统误差，在短时间内均可看作是线性的，如可采用对称测量法，则这种误差可基本上消除。

（2）基准变换消除法

用此法所消除的系统误差，从根源上看，多为定位基准不正确而产生的一种系统误差。它在测量过程中，反映在测量数据里呈线性形式，如用自准直仪及水平仪等测直线度误差（以测量的始、末两点的连线为基准），用相对法测量齿轮的周节累积误差等都是典型的实例。对这些测量所规定的数据处理方法，就是为了消除这一误差而采取的措施。下面以测量齿轮周节累积误差来说明。

齿轮的周节累积误差 ΔF_p，按规定应在被测齿轮分度圆附近，以齿轮几何中心为圆心的同一圆周上，可任选一齿距作为初始基准来测量。但在具体测量时，无法保证仪器的两测头正好都在这同一圆周上，而且任选的基准齿距本身也有误差，因此，就将带来因定位欠准确以及基准齿距本身的误差而引起的定值系统误差 Δ。而每一齿距的测量，又是接着前一齿距的测量位置连续测量的，所以这一误差展现在齿轮的整个周长上，就累积而呈现线性误差的形式。如图 3—12 所示，误差的绝对值逐步线性增加。这一误差一般可能是周节累积误差的测量误差的主要成分。

这一误差可通过"圆封闭原理"来发现。当没有误差时，测量一整周后，周节累积误差值必将回到原来的位置，即图 3—12 中最末一个代表齿距误差的点应落在横坐标上。如不是这样，则说明有误差存在。图中，最后一个累积误差值为 $-18\ \mu m$，它表示 Z（齿数）个 Δ 值等于 $-18\ \mu m$，齿数 $Z=18$，即 $\Delta=-1\ \mu m$。然后从各齿距测得的偏差值中依次减去 $\Delta, 2\Delta, 3\Delta, \cdots, Z\Delta$，就基本上消除了因定位及基准齿距不准确而产生的线性系统误差。本例中，$\Delta=-1\ \mu m$，$Z=18$，即依次对各齿距测得的偏差值加上 1，2，3，…，18 μm。

3．周期系统误差的消除方法

消除周期系统误差的基本方法是半周期法。周期误差一般是出现在有圆周运动的情况（如度盘等），多呈正弦形式，以 2π 为周期。因此，在相距 180°的两对径位置上作两次测量读数，再取平均值，即可消除此误差。这种方法和反向补偿法有些相似。从图 3—13 中可以看出：

$$\Delta L_1 = e\sin\varphi \qquad (e\ 为偏心)$$

$$\Delta L_2 = e\sin(180^\circ + \varphi) = -e\sin\varphi$$

故有

$$\Delta L_1 + \Delta L_2 = 0$$

如两次读数为 $L_1=L+\Delta L_1$ 和 $L_2=L+\Delta L_2$，则

$$\frac{L_1+L_2}{2}=\frac{L+L+(\Delta L_1+\Delta L_2)}{2}=L$$

所以周期系统误差被消除。

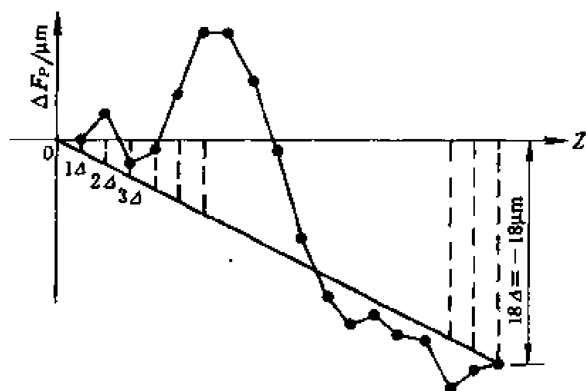


图 3—12

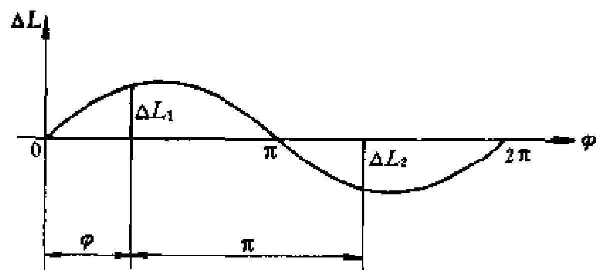


图 3—13

4. 复杂系统误差的消除方法

由于自动化测量技术及微机的应用，可用实时反馈修正的办法，来消除复杂的变值系统误差(也包括其他形式的变值系统误差和一部分随机误差)。当查明某种误差因素的变化(如某种形式的位移变化、温度、气压、介质折射率等的变化)，对测量结果有明显的复杂影响时，应尽可能找出其影响测量结果的函数关系或近似的函数关系(理论公式或经验公式)。在测量过程中，用传感器将这些误差因素的变化，转换成某种物理量形式(一般为电量)，及时按照其函数关系，通过计算机算出影响测量结果的误差值，并对测量结果作实时的自动修正。

第四章 粗 大 误 差

§4—1 粗大误差的概念

粗大误差又称疏忽误差或过失误差。它是由于技术不熟练，测量时不小心或外界的突然干扰（例如突然振动、仪器电源电压的突然变化）等原因造成的。含有粗大误差的测量数据，常比正常数据相差较大（过大或过小）。当对某一量值作多次独立的等精度重复测量，如其中个别或少数数据明显地偏大或偏小时，则可怀疑数据中含有粗大误差。

对已确知是在受到外界不正常干扰下测得的数据，或经检查明显是错读、错记的数据，则应弃舍。但不能不知原因不加分析就轻易弃舍测量列中最大或最小的数据，因为这样可能造成错觉，会对余下数据的精度作出过高的估计。

对较重要的测量（一般都是多次重复测量），其测得结果中被怀疑含有粗大误差而又不明原因的数据，应按一定的剔除准则来判断。为此，人们建立了一些准则，这些准则，都有一定的统计依据，但又各不相同。至于单次测量值是否含有粗大误差，则只能作直观判断。下面就常用的几种准则作一介绍。

§4—2 粗大误差的剔除准则和应用举例

一、粗大误差的剔除准则

1. 3σ 准则

3σ 准则又称莱以达（Райта）准则。当测量结果（测量列）中，某一数据的残差的绝对值 $|v|>3\sigma$ 时，则剔除此数据。因为如各测得值只含有随机误差，且按正态分布，残差 v 落在 $\pm 3\sigma$ 以外的概率只有 0.27%，它在有限次重复测量中发生的可能性很小，故当 $|v|>3\sigma$ 时，即可判断此数据含有粗大误差而予弃舍。

3σ 准则比较保守，因为在测量次数有限时，出现在靠近 $\pm 3\sigma$ 界限处的数据极少，除非有较大的粗大误差，否则 $|v|>3\sigma$ 而导致数据被剔除的可能性很小。

3σ 准则只宜用于重复测量次数较多（有的资料推荐测量次数 $n>50$）的重要测量中。

2. 肖维勒（Chauvenet）准则

肖维勒准则也是以正态分布为前提的。假设多次重复测量所得 n 个测得值中，某数据的残差 $|v|>Z_c\sigma$，则剔除此数据。实用中 $Z_c<3$，这在一定程度上弥补了 3σ 准则的不足。

由图 4—1 可知，$|v|\geq Z_c\sigma$ 的概率为

$$p=1-2\phi(Z_c) \quad \text{（图中阴影部分）}$$

即

$$2\phi(Z_c)=p[|x_i-\bar{x}|<Z_c\sigma]$$

在等精度的 n 次重复测量中，若只有一个测得值的残差 v 超出某一界限 $\pm Z_c\sigma$，而相应的

概率 $p=1-2\phi(Z)=1/n$，则按正态分布规律，此值的残差为正常超出，因为 n 个等精度测得值中出现一个的概率恰好是 $1/n$。这说明此值中含有随机误差，但不含粗大误差。

若按以上条件算出的概率 p 值小于 $1/n$ 很多，则上述正常超出的可能性减小，而含有粗大误差的非正常超出的可能性增大，这就是肖维勒准则的出发点。肖维勒准则规定：

当 $p=1-2\phi(Z)=\frac{1}{2n}$ 时，则判断该测得值的残差 v 为因含粗大误差的非正常超出，故应将该值剔除。

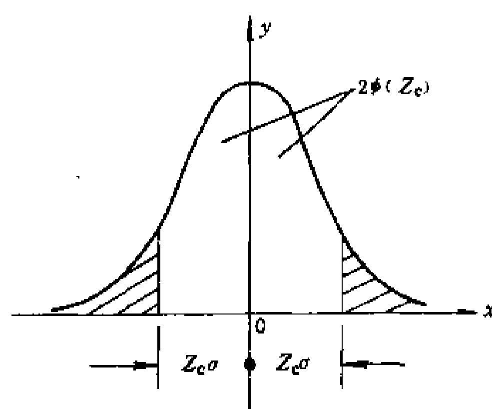


图 4—1

p 和 Z 加下标 c 以表示用于肖维勒准则：

$$p_c = 1 - 2\phi(Z_c) = \frac{1}{2n}$$

$$\phi(Z_c) = \frac{2n-1}{4n}$$

Z_c 值由 $\phi(Z_c)$ 查正态概率积分表确定，而 $\phi(Z_c)$ 又按上式决定于 n 值，因此可得简表 4—1 以备查用。

表 4—1　　肖维勒准则中的 Z_c 值

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Z_c	1.38	1.54	1.65	1.73	1.80	1.86	1.92	1.96	2.00
n	12	13	14	15	16	18	20	25	30
Z_c	2.03	2.07	2.10	2.13	2.15	2.20	2.24	2.33	2.39
n	40	50							
Z_c	2.49	2.58							

3．格拉布斯(Grubbs)准则

格拉布斯准则的来源推导较繁，这里只介绍具体用法。

在测量数值(测量列)中某一数据的残差的绝对值 $|v|>G\sigma$ 时，则判断此值中含有粗大误差，应予剔除，此即格拉布斯准则。G 值按重复测量次数 n 及置信概率 p_a 由表 4—2 查出。

表 4—2　　格拉布斯准则中的 G 值

测量次数 n	置信概率 p_a		测量次数 n	置信概率 p_a	
	0.99	0.95		0.99	0.95
3	1.16	1.15	8	2.22	2.03
4	1.49	1.46	9	2.32	2.11
5	1.75	1.67	10	2.41	2.18
6	1.94	1.82	11	2.48	2.23
7	2.10	1.94	12	2.55	2.28

测量次数 n	置信概率 p_a		测量次数 n	置信概率 p_a	
	0.99	0.95		0.99	0.95
13	2.61	2.33	16	2.74	2.44
14	2.66	2.37	18	2.82	2.50
15	2.70	2.41	20	2.88	2.56

4. t 检验准则

t 检验准则又称罗曼诺夫斯基(Романовский)准则，它是按 t 分布的实际误差分布范围来判断粗大误差，这对重复测量次数较少的情况比较合理，而一般测量的重复测量次数总是很有限的。

t 检验准则的特点是将测量列的 n 个测得值中可疑的测得值 x_j 先剔除，然后按余下的($n-1$)个数据计算算术平均值 $\bar{x}'$ 和标准差 σ' 值，再判断数据 x_j 是否含有粗大误差。

$$\bar{x}' = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} x_i \quad (\text{不含 } x_j)$$

$$\sigma' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n-1} v_i^2}{n-2}} \quad (\text{不含 } v_j = x_j - \bar{x}')$$

根据测量次数 n 和所选取的显著度 α，从表 4—3 中查得系数 k 值。

若所怀疑的数据 x_j 有：

$$|x_j - \bar{x}'| > k\sigma'$$

则可认为 x_j 为含有粗大误差的数据，应予剔除。反之保留。x_j 剔除后，再取一个 x'_j 值继续判断，直到数据不含粗大误差为止。

表 4—3　　t 检验准则中的系数 k 值

n \ α	0.05	0.01	n \ α	0.05	0.01	n \ α	0.05	0.01
4	4.97	11.46	13	2.29	3.23	22	2.14	2.91
5	3.56	6.53	14	2.26	3.17	23	2.13	2.90
6	3.04	5.04	15	2.24	3.12	24	2.12	2.88
7	2.78	4.36	16	2.22	3.08	25	2.11	2.86
8	2.62	3.96	17	2.20	3.04	26	2.10	2.85
9	2.51	3.71	18	2.18	3.01	27	2.10	2.84
10	2.43	3.54	19	2.17	3.00	28	2.09	2.83
11	2.37	3.41	20	2.16	2.95	29	2.09	2.82
12	2.33	3.31	21	2.15	2.93	30	2.08	2.81

除以上准则外，还有狄克逊(Dixon)准则等其他准则，可参阅有关文献[2][3][4]。

要指出，以上各准则都是人为主观拟定的，直到目前为止，还没有统一的规定。此外，所有准则，又都是以数据按正态分布为前提的，当偏离正态分布时，判断的可靠性将受影响，特别是测量次数很少时更不可靠。因此，对待粗大误差，除从测量结果中及时发现和利用剔除准则鉴别外，更重要的是要提高工作人员的技术水平和工作责任心，不要在情绪不宁和过于疲劳的情

况下，进行重要的测量工作，另外，要保证测量条件的稳定，防止因环境条件剧烈变化而产生的突变影响。

二、应用举例

在应用以上各准则判断粗大误差时要注意，若同时有一个以上的测得值的残差 v_i 超出判断界限，只能剔除其中 $|v_i|$ 最大的那一个数据（如只两个相同的数据超限，也只能剔除其中的任一个）。也就是说，一次只能剔除一个数据，之后再按剩下的 $(n-1)$ 个数据重新计算算术平均值 $\overline{x}'$ 以及 v_i' 和 σ'，继续判断另一个可疑数据，直到全部数据无问题为止。那些在前次判断中和被剔除的数据同时超限的次大（或同样大）的数据，在重新计算后，其 $|v|$ 可能不超过判断界限，所以每次只能剔除一个超限的数据。

例 4—1 为了了解某恒温室实际温度对标准温度 20℃ 的波动情况，连续对室温进行了 15 次重复测量，所得结果列于表 4—4，试检查其中有无粗大误差。

解： 从表中数据知，第 8 个测得值可疑。

(1) 按 3σ 准则

$$|v_{i8}| = 0.104; \quad 3\sigma = 0.033\times 3 = 0.099$$

$$|v_{i8}| > 3\sigma$$

故可判断 $t_8=20.30$℃ 含有粗大误差，应予剔除。再按余下的 14 个数值计算（表中右方）。

$$3\sigma' = 3\times 0.016 = 0.048$$

所有 14 个 $|v'_i|$ 值均小于 $3\sigma'$，故无再需剔除的坏值。

表 4—4　　　　例 4—1 数据表　　　　(℃)

测量顺序	测得值 t_i	按 15 个数据计算		按 14 个数据计算	
		$v_i=t_i-\bar{t}_{15}$	$v_i^2\times 10^6$	$v_i'=t_i-\bar{t}_{14}$	$v_i'^2\times 10^6$
1	20.42	+0.016	256	+0.009	81
2	20.43	+0.026	676	+0.019	361
3	20.40	−0.004	16	−0.011	121
4	20.43	+0.026	676	+0.019	361
5	20.42	+0.016	256	+0.009	81
6	20.43	+0.026	676	+0.019	361
7	20.39	−0.014	196	−0.021	441
8	20.30	(−0.104)	10 816	(已剔除)	(已剔除)
9	20.40	−0.004	16	−0.011	121
10	20.43	+0.026	676	+0.019	361
11	20.42	+0.016	256	+0.009	81
12	20.41	+0.006	36	−0.001	1
13	20.39	−0.014	196	−0.021	441
14	20.39	−0.014	196	−0.021	441
15	20.40	−0.004	16	−0.011	121
$\bar{t}_{15}=\dfrac{\sum_{i=1}^{15}t_i}{15}=20.404$ $\bar{t}_{14}=\dfrac{\sum_{i=1}^{14}t_i}{14}=20.411$		$\sum_{i=1}^{15}v_i^2=0.014\ 96$ $\sigma=\sqrt{\dfrac{0.014\ 96}{15-1}}=0.033$		$\sum_{i=1}^{14}v_i'^2=0.003\ 374$ $\sigma'=\sqrt{\dfrac{0.003\ 374}{14-1}}=0.016$	

(2) 按肖维勒准则

以 $n=15$ 查表 4—1,得 $Z_c=2.13$。

$$Z_c\sigma = 2.13\times 0.033 = 0.07$$

$$|v_8| = 0.104 > Z_c\sigma$$

故 t_8 应剔除,再按 $n=14$ 查表 4—1,得 $Z_c=2.10$。

$$Z_c\sigma'=2.10\times 0.016=0.034$$

所有 $|v_i'|$ 值均小于 $Z_c\sigma'$,故已无坏值。

(3) 按格拉布斯准则

以 $n=15$ 取置信概率 $p_a=0.99$,查表 4—2 得 G 值为 2.70。

$$G\sigma=2.7\times 0.033=0.09<|v_8|$$

故 t_8 应剔除,再按 $n=14,\beta=0.99$ 查表 4—2,得 G 值为 2.66。

$$G\sigma'=2.66\times 0.016=0.04$$

所有 $|v_i'|$ 值均小于 $G\sigma'$,故无坏值。

(4) 按 t 检验准则

先将可疑值 t_8 除外,按余下的 14 个数据计算得:

$$\bar{t}_{14}=20.411$$

$$\sigma'=0.016$$

取显著度 $\alpha=0.01$(即置信概率为 0.99)。已知 $n=15$,查表 4—3 得系数 $k=3.12$。则

$$k\sigma'=3.12\times 0.016=0.05$$

因 $$|t_8-\bar{t}_{14}|=|20.30-20.411|=0.111>0.05$$

故可判断数据 t_8 含有粗大误差,应予剔除。

再对余下的 14 个数据继续判断,先提出 t_7($|v_7'|$最大),

$$\bar{t}_{13} = 20.4103$$

$$\sigma'' = 0.0156$$

取显著度 $\alpha=0.01$,以 $n=14$ 查表 4—3 得 $k'=3.17$。则

$$k'\sigma''=3.17\times 0.0156=0.049$$

$$|t_7-\bar{t}_{13}|=|20.41-20.39|=0.02<0.049$$

故数据中已不含粗大误差。

第五章　非等精度测量

§5—1　概　述

前面各章讨论的都是等精度测量，即多次重复测量（测量列）中的每一个测得值，都是在相同的测量条件下获得的。

若测量条件（人员、仪器、方法、环境条件、求平均值的测量次数……）部分或全部改变，则各测得值的精度或可信赖程度就不一样，这就是非等精度测量。非等精度测量与等精度测量的性质不同，它们的数据处理方法也不一样。

在重要的测量中，有时有意改变测量条件，例如用不同精度的仪器来测量比对某一被测值，这就是不等精度测量，这样做有利于提高测量的可靠性和精度。有时，由于条件的限制，不能保证等精度测量的恒定（或基本上恒定）条件，这样的测量，客观上就是非等精度测量。

严格说来，绝对的等精度测量是很难保证的，但对条件差别不大的测量，一般都当作等精度测量对待。某些条件的变化，如测量时温度的波动等，只作为误差来考虑。因此，在实际应用中，按非等精度测量来处理的情况是比较少的。

§5—2　"权"的概念和加权平均值

为了便于说明"权"的概念，下面介绍一简单的例子：有两组重复测量，其次数 n 不同，一组 $n_1=10$ 次，另一组 $n_2=6$ 次，其他条件都相同，16 次测量中每一测得值 x_i 都是等精度的，其精度参数 σ 也相同。但两组的算术平均值 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 则是非等精度的，因为两组的测量次数不同。

$$第一组：\bar{x}_1=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{10}}{10},\sigma_{\bar{x}_1}=\frac{\sigma}{\sqrt{10}}$$

$$第二组：\bar{x}_2=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_6}{6},\sigma_{\bar{x}_2}=\frac{\sigma}{\sqrt{6}}$$

总的平均值

$$\bar{x}_p=\frac{\sum_{i=1}^{16}x_i}{16}=\frac{10\bar{x}_1+6\bar{x}_2}{10+6}$$

写成一般式有

$$\bar{x}_p=\frac{n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2+\cdots+n_m\bar{x}_m}{n_1+n_2+\cdots+n_m} \tag{5—1}$$

测量结果的可靠程度（可信赖程度），可用"权"来表示，可靠程度越高，则"权"越大。在其他测量条件相同的情况下，测量次数越多，则据以求得的测量结果（算术平均值）越可信赖，其

"权"也越大，故此时可用测量次数 n_i 来确定"权"。

"权"可理解为各组测量结果相对的可信赖程度。测量次数越多，测量方法越完善，测量所用的仪器精度越高，测量的环境条件越好，测量人员的水平越高，则测量结果越可靠，其"权"也越大。"权"是相互比较而存在的。上述两组测量，其"权"之比可取为测量次数之比(其他测量条件相同)，即 10:6，也可简化为 5:3。一般用符号 p 代表"权"，故式(5—1)可改写为

$$\bar{x}_p = \frac{p_1\bar{x}_1 + p_2\bar{x}_2 + \cdots + p_m\bar{x}_m}{p_1 + p_2 + \cdots + p_m} \tag{5—2}$$

这里 $\bar{x}_p$ 为加权平均值，因为参与计算总平均值(即 $\bar{x}_p$)的各 $\bar{x}_i$，都考虑了其"权"的相对大小，这样比较合理，而 $\sum_1^m p_i$ 则为 $\bar{x}_p$ 的"权"。

例 5—1 设用同一测角仪测某一角度 3 回，第一回 3 次，第二回 6 次，第三回 12 次(每取一读数为 1 次)。结果如下：$\bar{x}_1 = 32°41'20''$，$\bar{x}_2 = 32°41'30''$，$\bar{x}_3 = 32°41'25''$。求加权平均值。

解： 其"权"(测量次数比)为

$$p_1 : p_2 : p_3 = 3:6:12 = 1:2:4$$

此角度的加权平均值为

$$\bar{x}_p = \frac{32°41'20'' \times 3 + 32°41'30'' \times 6 + 32°41'25'' \times 12}{3 + 6 + 12}$$
$$= 32°41' + \frac{20'' \times 1 + 30'' \times 2 + 25'' \times 4}{1 + 2 + 4} = 32°41'26''$$

加权平均值不同于一般的算术平均值，算术平均值可看作加权平均值的一个特例，即等权平均值，若将其"权"p'简化为 1，则 $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ 的权 $p = np' = n$，即等精度测量算术平均值 $\bar{x}$ 的"权"为单个测得值的 n 倍。

§5—3 "权"和精度参数的关系

上面讲的例子，是按测量次数来确定"权"，其前提条件是其他测量条件相同。若各组的测量次数相同，而其他条件不同，如仪器精度、测量方法、测量人员、环境条件不同，则其"权"也应该不同。因为"权"是代表测量的可靠程度的，所以应将"权"和精度参数联系起来。用精度参数来定义"权"，更具有普遍意义。

现对某量做 n 次等精度测量，各测得值的标准差及"权"分别为 σ 及 p'，其算术平均值的标准差及"权"分别为 $\sigma_{\bar{x}}$ 及 p。由于

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad 或\ n = \frac{\sigma^2}{\sigma_{\bar{x}}^2}$$

又

$$p = np'$$

故

$$\frac{p}{p'} = \frac{\sigma^2}{\sigma_{\bar{x}}}$$

"权"为相对的比值，故可取 $p' = 1$，于是

$$p = \frac{\sigma^2}{\sigma_{\bar{x}}^2} \tag{5—3}$$

对 m 组测量次数不同的上述测量，有

$$p_1 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{\bar{x}_1}}, p_2 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{\bar{x}_2}} \cdots p_m = \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{\bar{x}_m}}$$

故有

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_m = \frac{1}{\sigma^2_{\bar{x}_1}} : \frac{1}{\sigma^2_{\bar{x}_2}} : \cdots : \frac{1}{\sigma^2_{\bar{x}_m}} \tag{5—4}$$

由式(5—4)可得出“权”的一般含义：即各组测量的“权”p_i，与各组测量结果 $\bar{x}_i$ 的方差 $\sigma^2_{\bar{x}_i}$ 成反比。人们正是这样来定义“权”和确定“权”的（不是用在特定条件下的不同测量次数 n_i）。

例 5—2 1m 米尺经由 3 位观测者测量，其结果如下：

第一组 $\bar{x}_1 = 1\,000.045$ mm, $\sigma_{\bar{x}_1} = 5$ μm;

第二组 $\bar{x}_2 = 1\,000.015$ mm, $\sigma_{\bar{x}_2} = 20$ μm;

第三组 $\bar{x}_3 = 1\,000.060$ mm, $\sigma_{\bar{x}_3} = 10$ μm。

求加权平均值 $\bar{x}_p$。

解： $p_1 : p_2 : p_3 = \frac{1}{5^2} : \frac{1}{20^2} : \frac{1}{10^2} = 16:1:4$

故 $\bar{x}_p = 1\,000 + \dfrac{0.045 \times 16 + 0.015 \times 1 + 0.060 \times 4}{16 + 1 + 4}$

$= 1\,000.046$ mm

§5—4 加权平均值 $\bar{x}_p$ 的精度参数 $\sigma_{\bar{x}_p}$

对不等精度测量，$\sigma_{\bar{x}_p}$ 不能用等精度测量的贝塞尔公式来求得，但可以先将不等权的测量组的“权”，作等权化处理，然后再计算 $\bar{x}_p$。

一、单位权的标准差 $\sigma_{单}$

上述各测量组的残差为

$$\bar{v}_i = \bar{x}_i - \bar{x}_p$$

各 $\bar{v}_i$ 的“权”仍分别为不同的 p_i。若取新的变量 $\bar{v}_i' = \sqrt{p_i}\bar{v}_i$，则各 $\bar{v}_i'$ 的“权”p_i' 将都为单位权 1。证明如下：

对 $\bar{v}_i' = \sqrt{p_i}\bar{v}_i$ 两边取方差得：

$$D(\bar{v}_i') = p_i D(\bar{v}_i) \qquad (\sqrt{p_i} \text{ 为常数})$$

即

$$\sigma^2_{\bar{v}_i'} = p_i \sigma^2_{\bar{v}_i}$$

于是有

$$\frac{1}{p_i'} = p_i \frac{1}{p_i} = 1$$

故

$$p_i' = 1$$

这样处理，叫作单位权化，即任一变量乘以自身的“权”的平方根后，得到的新变量的“权”为 1。

由于 $\bar{v}_i' = \sqrt{p_i}\bar{v}_i$ 的权都为 1，等效于等精度测量，故可用“$\sqrt{p_i}\bar{v}_i$”代人贝塞尔公式[式(2—7)]，求单位权的标准差 $\sigma_{单}$。即

$$\sigma_{单} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} p_i \bar{v}_i^2}{m-1}} \qquad (5—5)$$

式中： m——测量组数。

单位权化后的$\sqrt{p_i}\bar{v}_i$值，还具有以下重要性质，即

$$\sum_{i=1}^{m} \sqrt{p_i}\bar{v}_i = 0; \quad \sum_{i=1}^{m} p_i \bar{v}_i^2 = 最小$$

证明与第二章中等精度测量的"$\sum v_i = 0$"和"$\sum v_i^2 = 最小$"相同。

通过单位权的标准差 $\sigma_{单}$，可求出加权平均值 $\bar{x}_p$ 的标准差$\sigma \bar{x}_p$。

二、加权平均值的标准差 $\sigma_{\bar{x}_p}$

由式(5—3)及式(5—4)可知：

$$p_i \sigma_{\bar{x}_i}^2 = p' \sigma^2 = \sigma^2$$

式中：取"权"$p' = 1$，所以这里 σ 即为单位权的标准差$\sigma_{单}$。于是有

$$\sigma_{\bar{x}_i} = \frac{\sigma_{单}}{\sqrt{p_i}} = \frac{\sigma_{单}}{\sqrt{n_i}}$$

式中： n_i——第 i 组的测量次数。

因此，全部测得值的总平均值(加权平均值)的标准差为

$$\begin{aligned}
\sigma_{\bar{x}_p} &= \frac{\sigma_{单}}{\sqrt{n_1 + n_2 + \cdots + n_m}} \\
&= \sigma_{\bar{x}_i} \sqrt{\frac{n_i}{n_1 + n_2 + \cdots + n_m}} \\
&= \sqrt{\frac{p_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i}} \cdot \sigma_{\bar{x}_i} \\
&= \frac{\sigma_{单}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m} p_i}} \qquad (5—6)
\end{aligned}$$

式中： m——测量组数。

将 $\sigma_{单}$ 按式(5—5)代入，得：

$$\sigma_{\bar{x}_p} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m} p_i \bar{v}_i^2}{(m-1)\sum_{i=1}^{m} p_i}} \qquad (5—7)$$

由式(5—5)可知，$\sigma_{单}$ 是一个可随 p_i(相对比值)的改变而改变的数值，但按式(5—6)或式(5—7)计算得出的 $\sigma_{\bar{x}_p}$ 值，则不会变化，因为式中根号内的分母中有$\sum_{i=1}^{m} p_i$ 存在。

例 5—3 求上例测米尺的加权平均值及其标准差。

解：将计算数据列于表 5—1。

表 5—1　　计　算　数　据

$\bar{x}_i$ /mm	$\bar{x}_i' = \bar{x}_i - 1\ 000$ mm /μm	p_i	$p_i\bar{x}'_i$ /μm	v_i /μm	v_i^2	$p_iv_i^2$	p_iv_i /μm
1 000.045	45	16	720	−1.4	1.96	31	−22.4
1 000.015	15	1	15	−31.4	986	986	−31.4
1 000.060	60	4	240	+13.6	185	740	+54.4
Σ		21	975			1 757	+0.6≈0

加权平均值为

$$\bar{x}_p = 1\ 000 + \frac{975}{21} = 1\ 000.046 \text{ mm}$$

单位权组的标准差为

$$\sigma_{单} = \sqrt{\frac{\sum p_i v'_i}{m-1}} = \sqrt{\frac{1\ 757}{3-1}} = 29.6\ \mu\text{m}$$

加权平均值的标准差为

$$\sigma_{\bar{x}_p} = \frac{\sigma_{单}}{\sqrt{\sum p_i}} = \pm\frac{29.6}{\sqrt{21}} = 6.5\ \mu\text{m}$$

第六章 误差的合成与分配

§6—1 误 差 的 传 递

当我们要测量如图 6—1 所示截球体的体积时，最方便的方法是先测量圆截面的直径 d 和高度 h，再按下式计算体积 V（间接测量）：

$$V = \frac{\pi}{2}\left(\frac{hd^2}{4} + \frac{h^3}{3}\right)$$

如果在直接测量值 d 和 h 中含有误差 Δd 和 Δh，则由 $V=f(h,d)$ 计算出的体积 V 中，也必然会有误差 ΔV，而且与 Δh 和 Δd 之间也有一定的函数关系：$\Delta V = f'(\Delta h, \Delta d)$，这就是误差的传递。

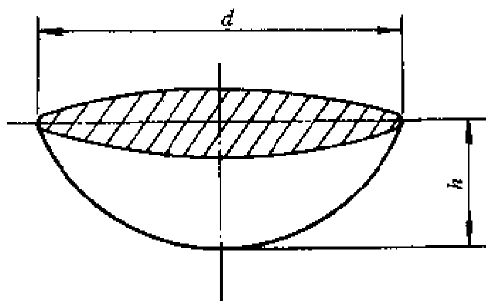


图 6—1

由两个（如 Δh，Δd）或多个误差值合并成一个误差值（如 ΔV），叫作误差的合成。它是间接测量计算误差的基本方法。反过来，如上例中已知对 ΔV 的要求，进而要确定具体测量时对 Δh 和 Δd 的要求，这就是误差的分配或误差分解。它是设计仪器和装置时不可缺少的步骤，即从仪器的总的精度要求出发，确定仪器各组成部分和环节（包括零件、部件和装调等）的精度要求。

要解决误差的合成与分配问题，首先要明确总的合成误差和各单项误差之间的函数关系，再按它们之间的变量关系进行计算。这实际上就是由多元函数的各个自变量的增量综合求函数增量或做相反计算的问题。

§6—2 系统误差的合成

设有 n 个直接被测量值 x_1，x_2，…，x_m，它们与合成后的间接被测量值 y 之间的函数关系为

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$

其全微分式为

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\mathrm{d}x_m$$

实际计算误差时，是以各直接测量值 x_i 的定值系统误差 Δx_i 来代替上式中的 $\mathrm{d}x_i$，即

$$\Delta y = \frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\Delta x_m \tag{6—1}$$

以上这种近似，即使 $y=f(x_i)$ 为非线性函数，对实际计算精度的影响也很微小，可以忽略不计。

式中，各$\frac{\partial f}{\partial x_i}$为误差传递系数，亦称灵敏系数，即各个定值系统误差 Δx_i 合成到总的定值系统误差 Δy 中去的传递比值。在已知函数 $y=f(x)$的各 x_i 点上，$\frac{\partial f}{\partial x_i}$均为固定值。

若以各 x_i 的算术平均值$\bar{x}_i$ 及 $\Delta\bar{x}_i$ 代入计算，则所得结果将是平均值 $\bar{y}$ 和 $\Delta\bar{y}$，因为它们之间的函数关系是不变的。

例 6—1 用弓高弦长法测圆弧半径(图 6—2)，其函数关系式为 $R=\frac{H}{2}+\frac{s^2}{8H}$。今测得弦长 $s=500$ mm，弓高 $H=50$ mm，若已知测量中有定值系统误差，$\Delta s=0.1$ mm，$\Delta H=0.05$ mm，求消除此定值系统误差后的半径值。

解：

$$R=\frac{H}{2}+\frac{s^2}{8H}=\frac{50}{2}+\frac{(500)^2}{8\times 50}=650\ \text{mm}$$

$$\Delta R=\frac{\partial R}{\partial H}\Delta H+\frac{\partial R}{\partial s}\Delta s=\left(\frac{1}{2}-\frac{s^2}{8H^2}\right)\Delta H+\left(\frac{s}{4H}\right)\Delta s$$

$$=\left(0.5-\frac{500^2}{8\times 50^2}\right)\times 0.05+\left(\frac{500}{4\times 50}\right)\times 0.1=-0.35\ \text{mm}$$

计算结果说明，ΔH 和 Δs 对 R 的综合影响是使测得(间接测量)的 R 值 650 mm 小于应有值 R'，故消除 ΔH 与 Δs 的影响后，半径 R'应为

$$R'=650+0.35=650.35\ \text{mm}$$

如在误差合成前先修正 ΔH 与 Δs，则有

$$R'=\frac{H'}{2}+\frac{s^2}{8H'}=\frac{(50-0.05)}{2}+\frac{(500-0.1)^2}{8(50-0.05)}=650.35\ \text{mm}$$

结果相同，但计算复杂一些。

这里要注意测量误差与测得值对公称值的实际偏差的区别，如 $s=500$ mm，$H=50$ mm 为公称值(基本尺寸)，Δs 与 ΔH 为测得值对公称值的实际偏差值，如测量误差很小，可忽略不计，则实际半径 R'为

$$R'=650-0.35=649.65\ \text{mm}$$

例6—2 使用正弦尺对一角度 φ 进行测量(图 6—3)，其关系式为

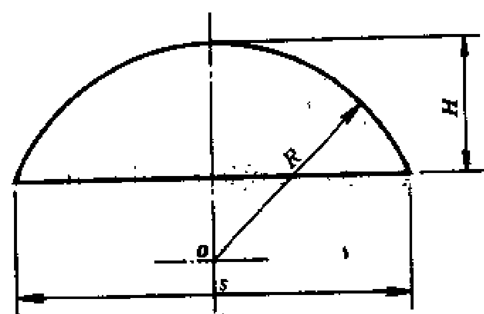


图 6—2

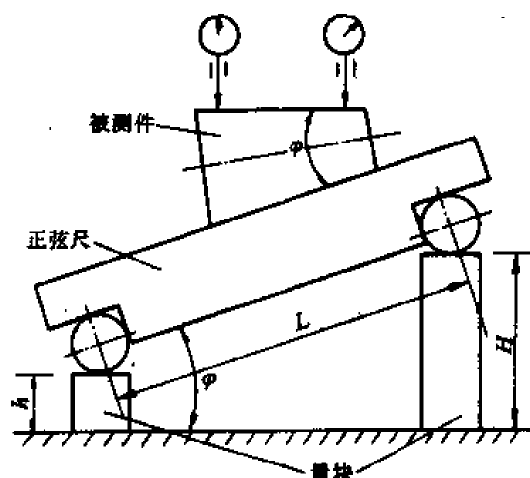


图 6—3

$$\sin\varphi = \frac{H-h}{L}$$

已知 $H=50$ mm, $h=20$ mm, $L=100$ mm,查表得量块的修正值 $\Delta H=0.6\ \mu m$,$\Delta h=-0.3\ \mu m$,又 L 的修正值 $\Delta L=1.5\ \mu m$。求角度 φ 的实际值。

解: 令

$$y=\sin\varphi=\frac{H-h}{L}$$

$$\sin\varphi=\frac{50-20}{100}=0.3$$

$$\varphi=17°27'27''$$

$$\Delta y=\Delta(\sin\varphi)=\cos\varphi\Delta\varphi$$

$$\cos\varphi=\cos(17°27'27'')=0.953\ 94$$

又

$$\Delta y=\frac{\partial y}{\partial L}\Delta L+\frac{\partial y}{\partial H}\Delta H+\frac{\partial y}{\partial h}\Delta h$$

$$\frac{\partial y}{\partial L}=\frac{-(H-h)}{L^2};\ \frac{\partial y}{\partial H}=\frac{1}{L};\ \frac{\partial y}{\partial h}=-\frac{1}{L}$$

因此有

$$\Delta\varphi=\frac{\Delta y}{\cos\varphi}$$

$$=\frac{1}{0.953\ 94}\left[\frac{-(50-20)}{100^2}\times 0.0015+\frac{0.000\ 6}{100}+\frac{0.000\ 3}{100}\right]$$

$$=0.000\ 005\approx 1''$$

这里要注意的是 ΔH,Δh 和 ΔL 不是测量误差,而是组成标准角度的参数 H,h 和 L 的实际偏差。H 的实际尺寸不是 50 mm,而是 50.000 6 mm。由直观即可知,它使 φ 角增大,$\Delta h=-0.3\ \mu m$,也是使角度 φ 增大,$\Delta L=1.5\ \mu m$,使 φ 角减小,三者综合影响是使 φ 角增大 $\Delta\varphi\approx 1''$。

这样,测量时即使指示表在左、右两点的示值相等,被测角度也不是 $\varphi=17°27'27''$,而是实际角度 φ':

$$\varphi'=\varphi+\Delta\varphi=17°27'28''$$

以上讲的都是定值系统误差,至于变值系统误差,其合成非常复杂,往往难以计算,故宜在合成前先做修正或消除。至于不定系统误差,按传统习惯是当作随机误差来处理,这个问题,后面还要谈到。

§6—3 随机误差的合成

随机误差是用标准差 σ(或其估计值标准差 σ_s)或极限测量误差 δ_{lim}来表示,随机误差的合成,主要是在一定置信概率条件下精度参数 σ 或δ_{lim}的合成。

一、基本计算公式

由前面可知,各直接测量值 x_i 与合成后的量值 y 之间的一般函数关系为

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$$

设对各 x_i 值都重复测量 n 次，其随机误差 $\delta x_{i,j}(i=1\sim m,\ j=1\sim n)$ 如下：

$$
\begin{array}{l}
\text{对 } x_1 \text{ 有 } \delta x_{11}, \delta x_{12}, \cdots, \delta x_{1n} \\
\text{对 } x_2 \text{ 有 } \delta x_{21}, \delta x_{22}, \cdots, \delta x_{2n} \\
\vdots \\
\text{对 } x_m \text{ 有 } \delta x_{m1}, \delta x_{m2}, \cdots, \delta x_{mn} \\
\hline
\text{相应地对 } y \text{ 有 } \delta y_1,\ \delta y_2,\ \cdots,\ \delta y_n
\end{array}
$$

纵向归纳，按式(6—1)可得以下各式：

$$
\left.\begin{aligned}
\delta y_1 &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{11} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_{21} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\delta x_{m1} \\
\delta y_2 &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{12} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_{22} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\delta x_{m2} \\
&\vdots \\
\delta y_n &= \frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_{1n} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_{2n} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_m}\delta x_{mn}
\end{aligned}\right\} \tag{6—2}
$$

将以上各式一一平方后得：

$$
\left.\begin{aligned}
\delta y_1^2 = &\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \delta x_{11}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \delta x_{21}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 \delta x_{m1}^2 \\
&+ \sum_{i\neq j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta_{i_1}\delta_{j_1} \\
\delta y_2^2 = &\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \delta x_{12}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \delta x_{22}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 \delta x_{m2}^2 \\
&+ \sum_{i\neq j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta_{i_2}\delta_{j_2} \\
&\vdots \\
\delta y_n^2 = &\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \delta x_{1n}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \delta x_{2n}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 \delta x_{mn}^2 \\
&+ \sum_{i\neq j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \delta_{i_n}\delta_{j_n}
\end{aligned}\right\} \tag{6—3}
$$

将式(6—3)中各分式相加后再除以 n 取得标准差之间的关系如下：

$$
\begin{aligned}
\sigma_y^2 = &\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 \sigma_{x_m}^2 + \\
&\sum_{i\neq j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \delta x_{i_k} \delta x_{j_k}}{n}
\end{aligned} \tag{6—4}
$$

当 n 足够大时，$\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \delta x_{i_k} \delta x_{j_k}}{n}$ 即为随机变量 x_{i_k} 和 x_{j_k} 的协方差。写成一般形式，即

$$
\frac{\sum\limits_{i\neq j} \delta_i \delta_j}{n} \approx E\{[x_i - E(x_i)][x_j - E(x_j)]\}
$$

$$= \mathrm{cov}(x_i, x_j)$$

于是相关系数 ρ_{ij} 为

$$\rho_{ij} = \frac{\mathrm{cov}(x_i, x_j)}{\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}} \tag{6—5}$$

代入式(6—4)得:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 \sigma_{x_m}^2 + \sum_{i \neq j} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \rho_{ij} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} \tag{6—6}$$

若各测量值的随机误差是相互独立的,且当 n 适当大时,相关系数 ρ_{ij}(或协方差,其含义本章第五节还要讲到)为零,则得独立测量的计算公式如下:

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 \sigma_{x_m}^2 \tag{6—7}$$

式(6—6)和式(6—7)就是随机误差传递的基本公式。

实用中,很多函数形式为线性函数,即

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m$$

故有

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_1, \frac{\partial f}{\partial x_2} = a_2, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_m} = a_m$$

$$\sigma_y = \sqrt{a_1^2\sigma_{x_1}^2 + a_2^2\sigma_{x_2}^2 + \cdots + a_m^2\sigma_{x_m}^2} \tag{6—8}$$

如 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 1$,则

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \cdots + \sigma_{x_m}^2} \tag{6—9}$$

若按算术平均值计算,则以 $\overline{y}$ 及 $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \cdots, \overline{x}_m$ 代替上列各式中的 y 及 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 即可(包括下标)。

一般测量多为独立测量,一些弱相关(相关系数很小)的情况也近似地当作独立测量对待。

对特定的分布,如正态分布,当各原始误差都取统一的置信概率来估算极限测量误差 $\delta_{\lim}$ 时,可用 $\delta_{\lim}$ 代替上式中的标准差 σ,因此有

$$\delta_{\lim y}^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \delta_{\lim x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \delta_{\lim x_2}^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)^2 \delta_{\lim x_m}^2 \tag{6—10}$$

二、随机误差合成中的置信概率

随机误差的合成,不受概率分布不同的限制,但为了方便和统一,各原始误差应取相同的置信概率。这样,合成后的误差也取相同的置信概率。由前面知:

$$\delta_{\lim_i} = \pm t_i\sigma_i$$

式中,置信系数 t_i 不仅与置信概率 p_a 有关,而且还与概率分布有关。同一置信概率 p_a,分布不同,t_i 也不同。当然,同一分布,p_a 不同,t_i 也不同。不同的分布,可用不同的 t_i 值来保证 p_a 的一致。

如有 $\overline{y} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2$,$x_1$ 的重复测量次数较多(如 $n_1 = 30$),服从正态分布,而 x_2 因某种原

因,测量次数较少(如 $n_2=8$),按 t 分布对待,若取置信概率 $p_a=0.95$,则有

$$\delta_{\lim\bar{x}_1}=\pm z\sigma_{\bar{x}_1}=\pm 1.96\frac{\sigma_{x_1}}{\sqrt{n_1}}\approx\pm 0.36\sigma_{x_1}$$

$$\delta_{\lim\bar{x}_2}=\pm t\sigma_{\bar{x}_2}=\pm 2.31\frac{\sigma_{x_2}}{\sqrt{n_2}}\approx\pm 0.82\sigma_{x_2}$$

关于置信概率的取值及常见主要分布的置信概率和置信系数,可查阅第二章有关介绍及表2—9。

例6—3 令有 $\bar{x}_p=\dfrac{p_1\bar{x}_1+p_2\bar{x}_2+\cdots+p_n\bar{x}_n}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}$,求加权平均值 $\bar{x}_p$ 的标准差 $\sigma_{\bar{x}_p}$ 和各 $\sigma_{\bar{x}_i}$ 的关系。

解:

$$\frac{\partial\bar{x}_p}{\partial\bar{x}_1}=\frac{p_1}{\sum p_i},\quad \frac{\partial\bar{x}_p}{\partial\bar{x}_2}=\frac{p_2}{\sum p_i},\quad \cdots,\quad \frac{\partial\bar{x}_p}{\partial\bar{x}_n}=\frac{p_n}{\sum p_i}$$

代入式(6—7)有

$$\sigma_{\bar{x}_p}=\sqrt{\frac{1}{(\sum p_i)^2}(p_1^2\sigma_{\bar{x}_1}^2+p_2^2\sigma_{\bar{x}_2}^2+\cdots+p_n^2\sigma_{\bar{x}_n}^2)}$$

如为等精度测量,则 $p_1=p_2=\cdots=p_n$。每组只测一次,即 $\sigma_{\bar{x}_i}=\sigma_{x_i}=\sigma$,于是有

$$\sigma_{\bar{x}_p}=\sigma_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{n\sigma^2}{n^2}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

由此也可说明,等精度测量可看作是非等精度测量的一个特例。

例6—4 已知 $y=kx_1^ax_2^bx_3^c$,x_1,x_2,x_3 均服从正态分布,求 y 与 x_i 之间相对误差的关系。

解:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=kax_1^{a-1}x_2^bx_3^c$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}=kbx_1^ax_2^{b-1}x_3^c$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_3}=kcx_1^ax_2^bx_3^{c-1}$$

按式(6—8)有

$$\begin{aligned}(\delta_{\lim y})^2= & k^2(ax_1^{a-1}x_2^bx_3^c)^2(\delta_{\lim x_1})^2\\ & +k^2(bx_1^ax_2^{b-1}x_3^c)^2(\delta_{\lim x_2})^2\\ & +k^2(cx_1^ax_2^bx_3^{c-1})^2(\delta_{\lim x_3})^2\end{aligned}$$

对上式两边同除以 y^2 再开方得:

$$\frac{\delta_{\lim y}}{y}=\pm\sqrt{a^2\left(\frac{\delta_{\lim x_1}}{x_1}\right)^2+b^2\left(\frac{\delta_{\lim x_2}}{x_2}\right)^2+c^2\left(\frac{\delta_{\lim x_3}}{x_3}\right)^2}$$

例6—5 按例6—2的正弦尺测角度，用50 mm和20 mm的5等量块，查表知其测量不确定度分别为

$$H = 50\ \text{mm}, U_H = 0.8\ \mu\text{m}$$
$$h = 20\ \text{mm},\ U_h = 0.6\ \mu\text{m}$$
（置信系数即包含因子 $k=3$）

又检定正弦尺尺寸 $L=100$ mm 的测量不确定度 $U_L=1\ \mu\text{m}(k=3)$。求角度 φ 的最后测量结果$\left(\sin\varphi=\dfrac{H-h}{L}\right)$。

解： 参照式(6—10)可用测量不确定度 U 代替 $\delta_{\lim}$（详见第七章），于是有：

$$U_\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial H}\right)^2 U_H^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial h}\right)^2 U_h^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial L}\right)^2 U_L^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial H} = \frac{1}{L};\ \frac{\partial f}{\partial h} = -\frac{1}{L};\ \frac{\partial f}{\partial L} = -\frac{H-h}{L^2}$$

代入后得：

$$U_\varphi = \frac{1}{0.953\ 94}\sqrt{\left(\frac{0.000\ 8}{100}\right)^2 + \left(\frac{0.000\ 6}{100}\right)^2 + \left(\frac{50-20}{100^2}\right)^2 \times (0.001)^2}$$
$$= \frac{0.001}{0.953\ 94}\sqrt{\frac{0.85}{10^4}}$$
$$= 0.000\ 009\ 66 \approx 2'' \qquad (k = 3)$$

故 $\varphi = 17°27'28'' \pm 2''$

§6—4 误差合成原理的实际应用

误差合成是精密测量和精度设计中广泛应用的一种基本方法，下面就测量方面的主要应用进行介绍。

一、间接测量的误差合成

误差合成是间接测量数据处理的重要步骤。前面已经介绍一些例子，这里不再重述。

二、分析确定最有利的测量条件

所谓最有利的测量条件，是指按该条件测量能使合成后的函数误差为最小。由前面式(6—1)、(6—6)、(6—7)可知，要使合成后的函数误差最小，应设法使各个传递系数$\partial f/\partial x_i$都减到最小，最理想是都等于零，但这是不可能的。在实际工作中，只能要求尽可能使主要的$\partial f/\partial x_i$减小，当$\partial f/\partial x_i$都减小到最小限度，这就意味着测量条件是最有利的。

例6—6 分析用弓高弦长法测圆弧半径的最有利测量条件（参看例6—1及图6—4）。

解： 测量的函数关系式为

$$R = \frac{H}{2} + \frac{s^2}{8H}$$

误差关系式为

$$\begin{aligned}\Delta R &= \frac{\partial R}{\partial H}\Delta H + \frac{\partial R}{\partial s}\Delta s \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{s^2}{4H^2}\right)\Delta H + \frac{s}{2H}\Delta s\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \cot^2\frac{\theta}{2}\right)\Delta H + \cot\frac{\theta}{2}\Delta s\right]\end{aligned}$$

θ 必须小于 90°，否则不是测量弦长，故 $\frac{\theta}{2}$ 是在 0～45°之间，相应的 $\cot\frac{\theta}{2}$ 值在∞～1 之间。令 $\frac{\partial R}{\partial H} = \frac{1}{2}\left(1 - \cot^2\frac{\theta}{2}\right) = 0$，则有 $\cot\frac{\theta}{2} = 1$，$\frac{\theta}{2} = 45°$，即 $\frac{\partial R}{\partial s}$ 也为最小值。$\frac{\theta}{2}$ 不能等于 45°，但越接近 45°越好，由此可得出结论：测量时弦长 s 的位置越靠近直径（即 $\theta\to 90°$）越有利。

例 6—7 分析用正弦尺测量角度的最有利测量条件（参看例 6—2 及图 6—3）。

解： 测量的函数关系式为

$$\sin\varphi = \frac{H - h}{L}$$

误差关系式为

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{\partial y}{\partial L}\Delta L + \frac{\partial y}{\partial H}\Delta H + \frac{\partial y}{\partial h}\Delta h\right] \\ &= \frac{1}{\cos\varphi}\left[-\frac{(H-h)}{L^2}\Delta L + \frac{1}{L}(\Delta H - \Delta h)\right]\end{aligned}$$

或

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{1}{L}(-\sin\varphi\Delta L + \Delta H - \Delta h)$$

要使 $\frac{\partial y}{\partial L}$，$\frac{\partial y}{\partial H}$ 及 $\frac{\partial y}{\partial h}$ 最小乃至趋近于零，则要求 $L\to\infty$ 及 $\varphi\to 0$。实际上正弦尺的尺寸 L 为有限的标准值（100 和 200 mm 或其他常值），而 $\varphi = 0$，测量即失去意义。但由上述可知，被测角度越小，测量的精度越高，故正弦尺不宜用于测量过大的角度。

例 6—8 分析用三针法测量螺纹中径的最有利测量条件（图 6—5）。

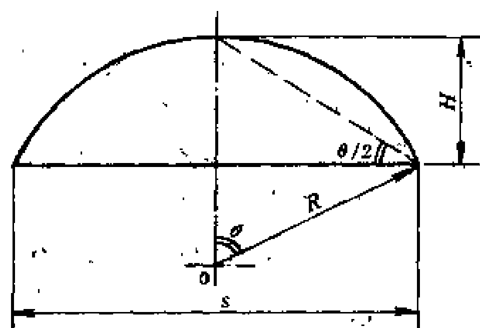


图 6—4

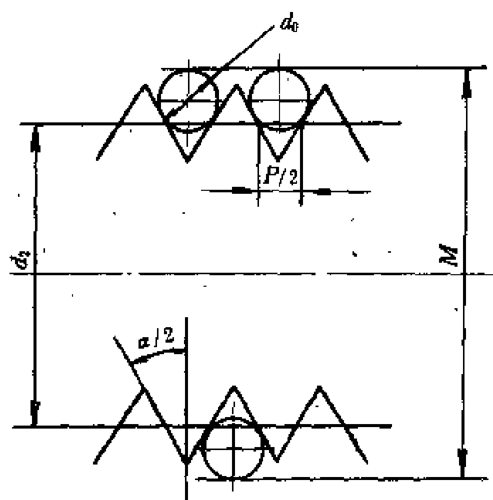


图 6—5

解：测量的函数关系式为

$$d_2 = M - d_0\left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right) + \frac{P}{2}\cot\frac{\alpha}{2}$$

式中：$d_2, P, \alpha/2$——被测螺纹的中径、螺距和牙型半角；

d_0——测针直径；

M——直接测得尺寸。

其误差关系式为

$$\Delta d_2 = \frac{\partial d_2}{\partial M}\Delta M + \frac{\partial d_2}{\partial d_0}\Delta d_0 + \frac{\partial d_2}{\partial P}\Delta P + \frac{\partial d_2}{\partial\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\Delta\frac{\alpha}{2}$$

式中，$\frac{\partial d_2}{\partial M}=1$；$\frac{\partial d_2}{\partial d_0}$和$\frac{\partial d_2}{\partial P}$为常数(因为 α 为常数)。

所以

$$\Delta d_2 = \Delta M - \left(1 + \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)\Delta d_0 + \frac{1}{2}\cot\frac{\alpha}{2}\Delta P + \frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left(d_0\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{P}{2}\right)\Delta\frac{\alpha}{2}$$

由式中可知，欲求最有利测量条件，只有使$\frac{\partial d_2}{\partial\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = d_0\cos\frac{\alpha}{2} - \frac{P}{2} = 0$

即

$$d_0 = \frac{P}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$$

测量时按被测螺纹的螺距选用最佳直径的测针，就是根据此式确定的。

三、分析和选择测量方法

对同一被测对象，用精度相同或相近、操作难度也差不多的量具仪器去测量，可能有几种测量精度不同的测量方法。通过分析和计算，应尽量按精度最高的方法进行测量。若某一测量方法的测量精度不能满足测量要求，也应分析、明确其影响测量精度的主要环节，并采取改善措施，使其满足测量精度的要求。

例 6—9　测量如图6—6所示两轴的中心距 L，有 3 种间接测量方法：

(1) $L = L_1 - \frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2}$

(2) $L = L_2 + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2}$

(3) $L = \frac{L_1}{2} + \frac{L_2}{2}$

如各基本尺寸为 $d_1 = d_2 = 20$ mm，$L = 80$ mm，则 $L_1 = 100$ mm，$L_2 = 60$ mm。

已知测 L_1, L_2, d_1, d_2 的极限测量误差如下：

$$\delta_{\text{lim}L_1} = \pm 100\ \mu\text{m}$$

$$\delta_{\text{lim}L_2} = \pm 130\ \mu\text{m}(L_2 \text{ 为内尺寸})$$

$$\delta_{\text{lim}d_1} = \delta_{\text{lim}d_2} = \pm 80\ \mu\text{m}$$

试选择最佳测量方法。

解： 按式(6—10)，以上 3 种测量方案相应有

(1) $$\delta^2_{\text{lim}L} = \left(\frac{\partial L}{\partial L_1}\right)^2 \delta^2_{\text{lim}L_1} + \left(\frac{\partial L}{\partial d_1}\right)^2 \delta^2_{\text{lim}d_1} + \left(\frac{\partial L}{\partial d_2}\right)^2 \delta^2_{\text{lim}d_2}$$

$$= 1^2 \times 100^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 80^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 80^2 = 13\ 200\ \mu\text{m}^2$$

$$\delta_{\text{lim}L} = \pm\sqrt{13\ 200} = \pm 115\ \mu\text{m}$$

(2) $$\delta^2_{\text{lim}L} = \left(\frac{\partial L}{\partial L_2}\right)^2 \delta^2_{\text{lim}L_2} + \left(\frac{\partial L}{\partial d_1}\right)^2 \delta^2_{\text{lim}d_1} + \left(\frac{\partial L}{\partial d_2}\right)^2 \delta^2_{\text{lim}d_2}$$

$$= 1^2 \times 130^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 80^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 80^2 = 20\ 100\ \mu\text{m}^2$$

$$\delta_{\text{lim}L} = \pm\sqrt{20\ 100} = \pm 142\ \mu\text{m}$$

(3) $$\delta^2_{\text{lim}L} = \left(\frac{\partial L}{\partial L_1}\right)^2 \delta^2_{\text{lim}L_1} + \left(\frac{\partial L}{\partial L_2}\right)^2 \delta^2_{\text{lim}L_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 100^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 130^2 = 6\ 725\ \mu\text{m}^2$$

$$\delta_{\text{lim}L} = \pm\sqrt{6\ 725} = \pm 82\ \mu\text{m}$$

计算结果表明，第三种方案的测量精度最高。第二种方案精度最低，因为它要测 3 个参数，而且其中有一测量精度较难保证的内尺寸 L_2。

例 6—10 测量如图6—7所示样板尺寸，$s = 10_0^{+0.003}$ mm，角度 $\alpha = 13°36'35'' \pm 20''$。采用如图所示之间接测量法，先测出精密圆柱(可用三针法测螺纹的测针)上方母线至平板的距离 H，再计算 s 值，看是否能满足测量精度的要求(极限测量误差不得超过公差的 30%)？

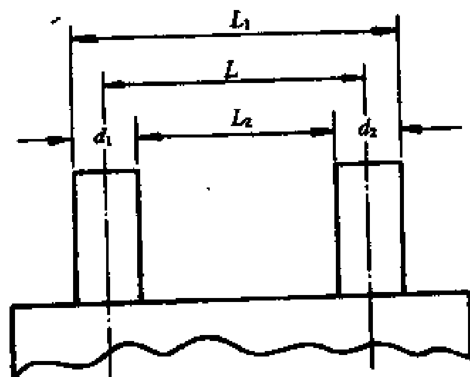


图 6—6

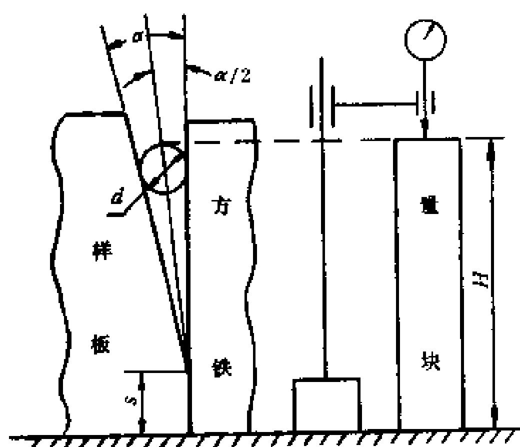


图 6—7

解：测量的函数关系式为

$$s = H - \frac{d}{2}\left(1 + \cot\frac{\alpha}{2}\right)$$

α 角事先已测出，其极限测量误差 $\delta_{\lim\alpha} = \pm 7''$（$\pm 0.000\ 034$ rad）。测针直径 $d = 3.177$ mm，其制造公差 $\delta_d = \pm 0.5\ \mu m$。为简便，近似地取 $\delta_{\lim d} = \pm\delta_d$。尺寸 H 的 $\delta_{\lim H}$ 取决于千分表的示值变动性（$\pm 0.5\ \mu m$）和量块组的误差（$\pm 0.5\ \mu m$）。故有

$$\delta_{\lim H} = \sqrt{0.5^2 + 0.5^2} = \pm 0.7\ \mu m$$

测量的误差关系式为

$$\delta_{\lim s}^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial H}\right)^2 \delta_{\lim H}^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial d}\right)^2 \delta_{\lim d}^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial \alpha}\right)^2 \delta_{\lim\alpha}^2$$

$$\frac{\partial s}{\partial H} = 1$$

$$\frac{\partial s}{\partial d} = -\frac{1}{2}\left(1 + \cot\frac{13°36'35''}{2}\right) = -4.7$$

$$\frac{\partial s}{\partial \alpha} = \frac{d}{4\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{3.177}{4\sin 6°48'18''} \approx 55$$

代入后得：

$$\delta_{\lim s} = \pm\sqrt{1^2 \times 0.7^2 + (-4.7)^2 \times 0.5^2 + 55^2 \times 0.000\ 034^2} \approx \pm 2.4\ \mu m$$

2.4 μm 已接近公差值 3 μm，显然测量精度过低。

分析三项误差因素可知：减小 $\delta_{\lim H}$ 主要靠提高测微表（千分表）和量块的精度，潜力有限，且传递系数 $\frac{\partial s}{\partial H} = 1$，远小于其他两项。$\frac{\partial s}{\partial \alpha} = 55$，最大，但 $\delta_{\lim\alpha}$ 极小，影响可忽略。$\frac{\partial s}{\partial d} = -4.7$ 和 $\frac{\partial s}{\partial H}$，$\frac{\partial s}{\partial \alpha}$ 一样，都是常数，所以提高测量精度主要看 $\delta_{\lim d}$ 能否减小。

如用高精度仪器以高"等"量块来检定测针直径 d，其检定误差可小到 $\pm 0.1\ \mu m$。这样，$\delta_{\lim d}$ 可取 $\pm 0.1\ \mu m$，而不是 $\pm 0.5\ \mu m$（使用时尺寸 d 取实际尺寸）。于是有

$$\delta_{\lim s} \approx \pm\sqrt{1^2 \times 0.7^2 + (-4.7)^2 \times 0.1^2} \approx \pm 0.84\ \mu m$$

尺寸 s 的公差 $\delta_s = 3\ \mu m$。

则

$$\frac{\delta_{\lim s}}{\delta_s} = \pm\frac{0.84}{3} = \pm 28\%$$

这样就满足了测量精度的要求。

四、测量误差的分配

在间接测量中，有时要根据间接被测参数（尺寸）总的极限测量误差要求，来确定各个有关

的直接测量参数(尺寸)的测量误差要求,并据以选择测量方法。由于各直接测量参数大小不一,重要性不同,测量的难易程度也不一样,所以分配到的误差值也应不同。

具体进行误差分配时,可先设各个“$(\partial f/\partial x_i)\delta_{\lim x_i}$”都相等,求出各个 $\delta_{\lim x_i}$ 值,再互相合理调配,但最后仍需满足误差关系式的要求。

例 6—11 测量一圆柱体的体积,$V=\frac{\pi D^2}{4}h$,要求相对误差不超过 1%,试决定用什么量具来测量其直径 D 和高 h? 已知 $D_{公称}=20$ mm,$h_{公称}=50$ mm。

解:

$$V=\frac{\pi D^2}{4}h=\frac{\pi\times 20^2}{4}\times 50=5\,000\pi(\text{mm})^3$$

$$\delta_{\lim V}=V\times 1\%=50\pi(\text{mm})^3$$

$$\frac{\partial V}{\partial D}=\frac{1}{2}\pi Dh=500\pi$$

$$\frac{\partial V}{\partial h}=\frac{\pi D^2}{4}=100\pi$$

先令
$$\frac{\partial V}{\partial D}\delta_{\lim D}=\frac{\partial V}{\partial h}\delta_{\lim h}$$

于是有
$$(\delta_{\lim V})^2=\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2(\delta_{\lim D})^2+\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2(\delta_{\lim h})^2$$

$$=2\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2(\delta_{\lim D})^2$$

$$\delta_{\lim V}=\pm\sqrt{2}\,\frac{\partial V}{\partial D}\delta_{\lim D}$$

$$50\pi=\pm\sqrt{2}500\pi\delta_{\lim D}$$

$$\delta_{\lim D}=\pm 0.07\text{ mm}$$

同样可求得:

$$\delta_{\lim h}=\pm 0.35\text{ mm}$$

这样的测量精度要求,可用游标卡尺来测量。查游标卡尺检定规程,知分度值为 0.1 mm 的游标卡尺测量 0~300 mm 尺寸时,示值误差允许值为 ±0.1 mm。用来测量高度 h 是很宽裕的(0.1 mm<0.35 mm),但测直径 D 就不行了(0.1 mm>0.07 mm)。测直径 D 可用分度值为 0.05 mm 的游标卡尺,其示值误差允许值为 ±0.05 mm(小于 0.07 mm)。

我们可不按 $(\partial V/\partial D)\delta_{\lim D}=(\partial V/\partial h)\delta_{\lim h}$ 来分配误差。先设定用 0.1 mm 的游标卡尺测量直径 D,即先取 $\delta_{\lim D}=\pm 0.1$ mm,再核算 $\delta_{\lim h}$。

$$(\delta_{\lim V})^2=\left(\frac{\partial V}{\partial D}\right)^2(\delta_{\lim D})^2+\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2(\delta_{\lim h})^2$$

$$(50\pi)^2=(500\pi)^2\times(0.1)^2+(100\pi)^2\times(\delta_{\lim h})^2$$

$$\delta_{\lim h}=0$$

这显然不合理,也就是说,由于 $\frac{\partial V}{\partial D}$ 很大,故 $\delta_{\lim D}$ 不能等于或大于 ±0.1 mm。

§6—5 “相 关” 问 题

当各有关测得值 x_i 的随机误差之间存在相关关系时，误差的计算式要用式(6—6)的形式，它与误差相互独立时计算误差所用的式(6—7)是明显不同的，后者没有“$\sum_{i\neq j}\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_j}\rho_{ij}\sigma_{x_i}\sigma_{x_j}$”这一相关项。相关项的主要问题是要确定相关系数 ρ_{ij}，当 x_i 的数目很多时，计算相当复杂。

一、“相关”的基本概念

一个变量的变化，受另一变量的影响，且两变量之间有一定的非函数的统计关系，则此两变量相关，其间的统计关系为相关关系。

实际工作中遇到的相关关系，多为线性相关。相关的密切程度，可用相关系数 ρ_{ij} 来表示，如有 x、y 两变量，其对应的取值如下：

$$x:\quad x_1, x_2, x_3, \cdots, x_m$$

$$y:\quad y_1, y_2, y_3, \cdots, y_m$$

将以上对应值以点 $P_i(x_i, y_i)$ 的形式标定在图 6—8 所示坐标上。

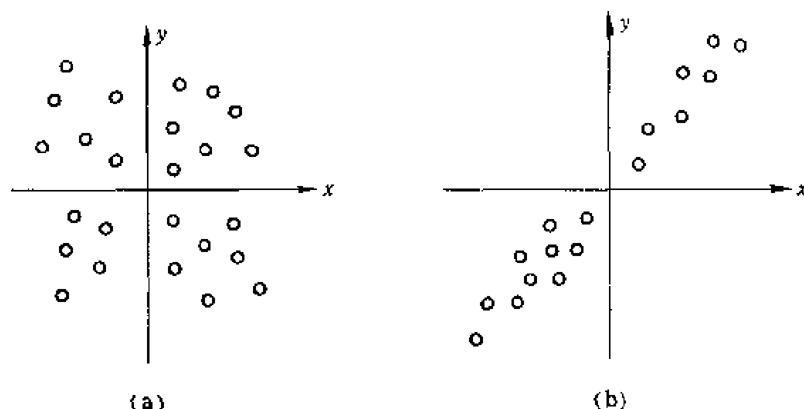


图 6—8

在图 6—8(a)中，各对(x_i, y_i)值之间无明显的带规律性的关系，即不相关。图 6—8(b)中，x_i 与y_i 之间有明显的联系，即 x 增大(或减小)，y 也增大(或减小)，因此 x 与 y 是相关的，且有明显的线性相关关系，它可用直线方程来近似表示。下面分两种情况来分析。

1. y 随 x 的改变而变化

这可用方程 $y = mx$ 来表示[图 6—9(a)]，选坐标通过原点比较简便。

直线方程 $y = mx$(简单地说即 m 值)应按最小二乘法的原则(详见第八章)来确定。如图 6—9(a)所示，即要求：

$$\sum(\Delta y_i)^2 = \sum(y_i - mx_i)^2 = \text{最小}$$

设
$$M = E[\Delta y_i^2] = E[(y_i - mx_i)^2]$$

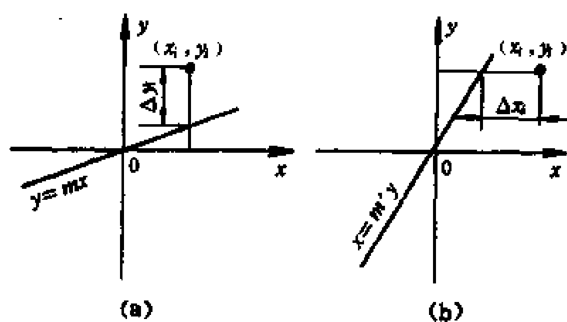


图 6—9

$$=E[y_i^2]+m^2E[x_i^2]-2mE[x_iy_i]$$

令
$$\frac{\partial M}{\partial m}=0$$

即
$$\frac{\partial M}{\partial m}=0+2mE[x_i^2]-2E[x_iy_i]=0$$

于是得：
$$m=\frac{E[x_iy_i]}{E[x_i^2]}=\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x^2}$$

即最能表示 x 与 y 关系的最佳直线方程为

$$y=mx=\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x^2}x$$

这里，$\mathrm{cov}(x,y)$ 为随机变量 x 与 y 的协方差。

将上式两边同除以 σ_y，由式(6—5)得：

$$\frac{y}{\sigma_y}=\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}\cdot\frac{x}{\sigma_x}=\rho_{x,y}\frac{x}{\sigma_x} \tag{6—11}$$

这样，就引出了相关系数 $\rho_{x,y}$。

2. x 随 y 的改变而变化

这可用方程 $x=m'y$ 来表示[图 6—9(b)]，同样可得到：

$$\frac{x}{\sigma_x}=\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}\cdot\frac{y}{\sigma_y}=\rho_{x,y}\frac{y}{\sigma_y} \tag{6—12}$$

如相关系数 $\rho_{x,y}=+1$ 或 -1 时，则两直线方程式(6—11)与式(6—12)都将合一，代表同一直线[图 6—10(a)或(e)]。它表示 x 与 y 完全相关，即两变量之间有确定的线性函数关系。$\rho_{x,y}=0$，则两直线分别与 x,y 坐标轴重合[图 6—10(c)]，它一般表示 x 与 y 互相独立，不相关。但在有些情况下，并不排除 x 与 y 两变量之间存在某种非线性关系，如图 6—11 所示，x，y 之间有抛物线关系。非线性关系可用非线性回归的方法处理。相关系数 ρ 一般是在 0 与 ±1之间，即 $-1<\rho<+1$。ρ 的绝对值较大时，为强相关；反之为弱相关。如变量 x 随另一变量 y 的增大而增大，则 ρ 为正值，即正相关；y 增大 x 反而减小，ρ 为负值，即负相关。

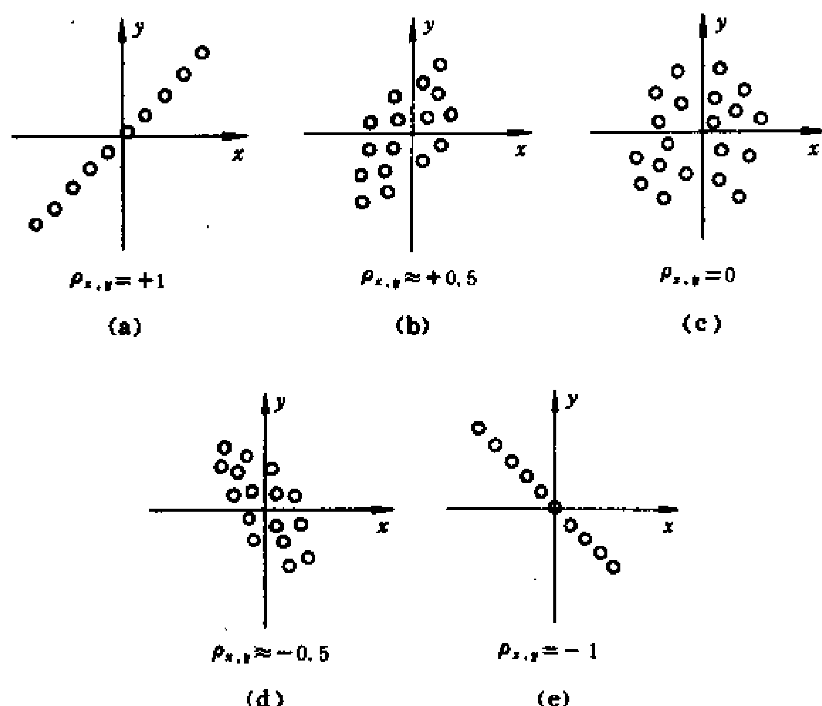


图 6—10

二、相关系数的求法

相关系数有以下几种求法。

1. 直观判断法

直接测出或求出两误差 δx_i 和 δy_i 的一系列对应值，将其以坐标点形式 $P_i(\delta x_i, \delta y_i)$ 标在坐标图上，如图6—10所示，再估定相关系数 ρ。

2. 直接计算法

对一系列测得值或求出值 x_i, y_i 直接按相关系数的定义来计算。

按式(6—4)和式(6—5)有

$$\rho_{x,y}=\frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

$$=\frac{(\sum\delta x_i\delta y_i)/n}{\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}\cdot\frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n}}}$$

$$=\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2\sum(y_i-\bar{y})^2}}$$

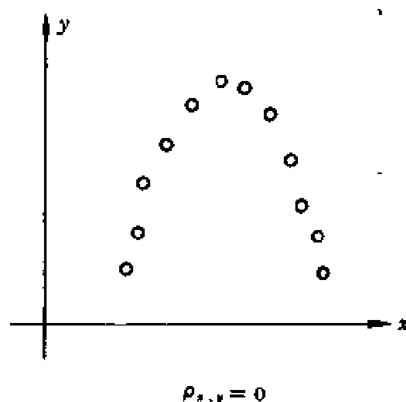


图 6—11

采用直接计算法，只有当“数据对”的数目 n 足够大时，这种计算方法才有意义，否则很不准确。

3. 点阵计算法

将一系列 x_i,y_i 值，以坐标点形式标在坐标图上，如图6—12所示。做平行于 y 轴的直线A，将图中全部点数左右均分，再做平行于 x 轴的直线B，将全部点数上下均分，并尽量使A、B两线上无点。设在以A、B线所划分的4个象限内的点数分别为 n_1,n_2,n_3 和 n_4，则相关系数 $\rho_{x,y}$ 为

$$\rho_{x,y}\approx-\cos\left(\frac{n_1+n_3}{n_1+n_2+n_3+n_4}\pi\right)$$

公式证明可参阅参考文献[19]。当点数较少时，这种方法也不准确。

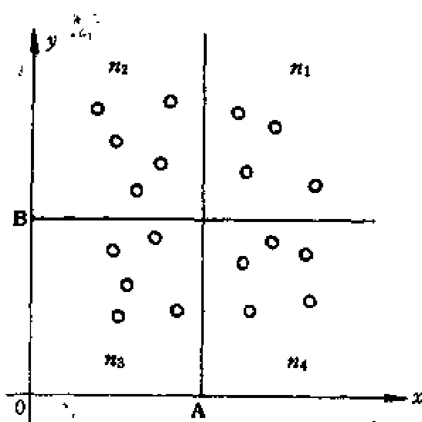


图 6—12

例6—12 今有以下函数关系式：

$$y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$
$$y_2=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n$$

式中，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 互相独立，服从正态分布，且为等精度测量的直接测得值。很明显，x_i 增大，y_1 也增大，y_2 也随之增大，故 y_1 与 y_2 相关。试用直接计算法求相关系数 ρ_{y_1,y_2}（已知 n 足够大）。

解： 因 x_i 为等精度测量值，故有

$$\sigma_{x_1}=\sigma_{x_2}=\cdots=\sigma_{x_n}=\sigma_x$$

按式(6—7)有

$$\sigma_{y_1}^2=a_1^2\sigma_{x_1}^2+a_2^2\sigma_{x_2}^2+\cdots+a_n^2\sigma_{x_n}^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_x^2$$

$$\sigma_{y_2}^2=b_1^2\sigma_{x_1}^2+b_2^2\sigma_{x_2}^2+\cdots+b_n^2\sigma_{x_n}^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^2\sigma_x^2$$

平均值为

$$\bar{y}_1=a_1\bar{x}_1+a_2\bar{x}_2+\cdots+a_n\bar{x}_n$$
$$\bar{y}_2=b_1\bar{x}_1+b_2\bar{x}_2+\cdots+b_n\bar{x}_n$$

于是有

$$y_1-\bar{y}_1=a_1(x_1-\bar{x}_1)+a_2(x_2-\bar{x}_2)+\cdots+a_n(x_n-\bar{x}_n)$$
$$y_2-\bar{y}_2=b_1(x_1-\bar{x}_1)+b_2(x_2-\bar{x}_2)+\cdots+b_n(x_n-\bar{x}_n)$$

$$(y_1-\bar{y}_1)(y_2-\bar{y}_2)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i(x_i-\bar{x})^2+\sum_{i\neq j}^{n}a_ib_j(x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j)$$

因 n 足够大，故

$$\sum a_ib_j(x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j)\to 0$$

于是

$$(y_1-\bar{y}_1)(y_2-\bar{y}_2)=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i(x_i-\bar{x})^2$$

由式(6—5)有

$$\rho_{y_1,y_2} = \frac{\sum_{k=1}^{N}(y_{1k}-\bar{y}_1)(y_{2k}-\bar{y}_2)}{N\sigma_{y_1}\sigma_{y_2}}$$

又

$$\sum_{k=1}^{N}(y_{1k}-\bar{y}_1)(y_{2k}-\bar{y}_2) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i\neq 1}^{n}a_ib_i(x_{ik}-\bar{x}_i)^2$$

$$= a_1b_1\sum_{k=1}^{N}(x_{1k}-\bar{x}_1)^2 + a_2b_2\sum_{k=1}^{N}(x_{2k}-\bar{x}_2)^2$$

$$+\cdots + a_nb_n\sum_{k=1}^{N}(x_{nk}-\bar{x}_n)^2$$

由于

$$\sum_{k=1}^{N}(x_{ik}-\bar{x}_i)^2 = N\sigma_{x_i}^2 = N\sigma_x^2 \qquad (i = 1 \sim n)$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}(y_{1k}-\bar{y}_1)(y_{2k}-\bar{y}_2) = a_1b_1N\sigma_x^2 + a_2b_2N\sigma_x^2 + \cdots + a_nb_nN\sigma_x^2$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\Big)N\sigma_x^2$$

因此

$$\rho_{y_1,y_2} = \frac{\Big(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\Big)N\sigma_x^2}{N\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2\sigma_x^2}}$$

$$= \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)}}$$

由于相关关系是非函数的统计关系，加之实际工作中测量次数有限，所以无论是估计或计算相关系数，都难以做到很准确。因此，如有可能，最好避免“相关”。例如有 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的间接测量函数式，$x_1$ 与 x_2 相关，其他 x_i 不相关。如能有

$$z = \varphi(x_1, x_2)$$

即采取测 z 值而回避直接测x_1 和 x_2，则

$$y = f(z, x_3, x_4, \cdots, x_n)$$

这样，就不存在相关关系了。

第七章　测量结果的质量评定

在工农业生产、科学研究、商贸、医疗以及社会生活的许多方面,都要进行大量的不同形式、不同要求的测量。测量结果的质量如何?是否可信赖?这是测量者、测量结果的使用者以及有关各方最为关心的问题。因此,必须对测量结果的质量进行科学的规范统一的评定。

§7—1　传统的精密测量数据处理步骤和测量结果的评定

一、数据处理步骤

精密测量某一量值,一般是做多次重复测量,得到一系列测得值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$,其数据处理步骤如下:

1. 求全部测得值的算术平均值 $\bar{x}$,残差 v_i 和标准差 σ_x

按第二章中叙述的方法和公式计算。

2. 判断有无粗大误差

按第四章介绍的方法和准则,来判断数据中是否含有粗大误差。如含有,则剔除含有粗大误差的数据后,再重新计算 $\bar{x}, v_i$ 和 σ_x。

3. 检查有无系统误差

(1) 如有定值系统误差,则设法消除或确定总的误差修正值 Δ_0,对算术平均值进行修正,即取 $\bar{x} + \Delta_0$。

(2) 如有明显的变值系统误差,则一定要设法修正或消除,并再次计算 $\bar{x}, v_i$ 和 σ_x。

(3) 如有不定系统误差,应估定其大小范围,当作随机误差处理。

4. 计算算术平均值的标准差 $\sigma_{\bar{x}}$ 和多次重复测量的极限测量误差 $\Delta_{\lim\bar{x}}$

极限测量误差 $\Delta_{\lim\bar{x}} = \pm t\sigma_{\bar{x}}$,并注明置信概率。$t$ 值按正态分布时一般取 2 或 3。

5. 确定测量方法总的极限测量误差 $\delta_{\lim\bar{x}}$

写出最后测量结果"$\bar{x} + \Delta_0 \pm \delta_{\lim\bar{x}}$",并注明置信概率。

$\delta_{\lim\bar{x}}$除含$\Delta_{\lim\bar{x}}$外,还要考虑那些在多次重复测量中,不能充分反映出来的随机性误差因素和不定系统误差,下面用一实例来说明。

在卧式光学计上用 4 等量块检定 100 mm 的千分尺校对杆,共测 20 次,经以上处理步骤得:

$$\bar{x} = 100.003\ 5\ \text{mm}$$

$$\Delta_{\lim\bar{x}} = \pm 0.47\ \mu\text{m}(p = 99.73\%)$$

但还有两项明显的误差因素在多次重复测量中不能充分反映出来。

(1) 量块的检定误差 $\Delta_{\lim G}$

查规程知 100 mm 的 4 等量块的测量不确定度为 0.4 μm。量块的这一误差，是以定值系统误差的性质影响测量结果，但其大小和正负符号都不知道，只是以一定置信概率估计在 ±0.4 μm范围之内，它实际上是属不定系统误差，按习惯可当作随机误差处理。

(2) 温度误差 $\Delta_{\lim T}$

作为随机量的温度波动误差（测量是在恒温室内进行），在有限次重复测量的很短时间里，是不能充分反映在测量结果里的。经按式(3—7)计算，得到 $\Delta_{\lim T}=\pm 0.6\ \mu m$。

两项误差都按正态分布以 99.73% 的置信概率（与 $\Delta_{\lim}$相同）估计取值，故测量方法的总的极限误差 $\delta_{\lim \bar{x}}$为

$$\delta_{\lim \bar{x}}=\pm\sqrt{\Delta_{\lim \bar{x}}^2+\Delta_{\lim G}^2+\Delta_{\lim T}^2}$$

$$=\pm\sqrt{0.47^2+0.4^2+0.6^2}\approx\pm 1\ \mu m$$

量块的修正值为 $\Delta_0=+0.000\,2$ mm（无其他定值系统误差）。

故最后测量结果为

$$\bar{x}+\Delta_0\pm\delta_{\lim \bar{x}}=100.003\,5+0.000\,2\pm 0.001$$

$$=100.004\pm 0.001\ \text{mm}(p=99.73\%)$$

测量结果的质量好坏，由总的极限测量误差 $\delta_{\lim \bar{x}}$的大小来评定。

二、存在的问题

由以上处理过程可以看出，测量结果的质量评定尚存在一些问题，主要是：不定系统误差的处理是否恰当？当作随机误差对待时，它的分布、置信概率以及标准差如何确定？而且概念上也是模糊的。“系统”与“随机”的分类在某些情况下，特别是在较复杂的情况下，有时难于区分，两类误差在一定条件下会互相转化，同时还受到测量人员主观判断的影响，难以统一。在很多情况下，人们对各种系统误差的信息，不能全面掌握和了解。对误差合成的方法，也有不同意见：有传统的以标准差的平方和再开方的方法（如上例）；还有在某些情况下为了结果可靠，主张各误差分量线性相加；也有人主张采用介于这两者之间的协调方法。

另外，名词术语也不确切，极限测量误差 $\pm\delta_{\lim}$是误差可能分散的一个区间，本身不是误差，是测量误差的分布极限。名词术语不确切，易引起概念上的混淆。

为了对测量结果进行统一的评定，人们提出了“测量不确定度”的概念。

§7—2 测量不确定度

一、发展过程简介

不确定度（Uncertainty）一词，由来已久。1970 年前后，这一术语在一些国家的计量领域逐渐被引用，作为评定测量结果质量的定量参数。但对它的理解和表达方法还不统一。

鉴于测量不确定度的重要性，1978 年国际计量大会作出决议，要求制定表述不确定度的指导性文件，以适应国际间科技交流和贸易的迫切需要。1980 年国际计量局在征求各国意见的基础上，提出了“实验不确定度建议书 INC－1(1980)”，规定了不确定度的评定和表达方式的原则。并委托能较好地反映工业和商业需求的国际标准化组织（ISO）牵头在建议书的基础上，制订一个详细的指南性文件，这项工作得到了 7 个重要国际组织的支持和赞同。由国际标

准化组织(ISO)、国际计量局(BIPM)、国际电工委员会(IEC)和国际法制计量组织(OIML)提名组成的工作组,于1993年制订出了《测量不确定度表达指南》,1995年又作了修订。《指南》以前述7个国际组织的名义由ISO正式颁布,作为这些组织今后必须遵循的文件。《指南》迅速在世界各国得到广泛应用。

我国经过广泛深入的研究和探讨,于1999年批准发布了适合我国国情的《测量不确定度评定与表示》计量技术规范(JJF1059—1999),内容原则上等同采用了上述国际上的《测量不确定度表达指南》的基本内容,以利于国际间的交流与合作,与国际接轨。

二、测量不确定度的定义

从词义上看,测量不确定度意味着对测量结果的可靠性和有效性的怀疑程度或不能肯定的程度。其正式定义为:“表征合理地赋与被测量值的分散性并与测量结果相联系的参数”。

首先它是一个与测量结果联系在一起的参数。在测量结果的完整表示中,应有被测量值的估计值 y(如经过修正的一系列测得值的算术平均值)和测量不确定度 U,即 $y \pm U$。由于测量误差的存在,在对被测量量值进行多次重复测量时,测得值将具有一定的分散性,而测量不确定度要能表征这种合理的分散性。所谓“合理”,主要是指测量应处于随机状态(对系统效应作了修正),并且是在重复性条件下进行的。对同一被测量值作多次重复测量,其测量结果的分散性可用贝塞尔公式计算,用标准差表示。

测量不确定度是定量说明测量结果质量的参数,它本身没有正负号,但当用 $y \pm U$ 的形式表示测量结果时,$\pm U$ 代表被测量值的可能分散区间。

测量不确定度可用标准差 u(即前面的 σ 或 s)表示,用标准差表示的测量不确定度,称为标准不确定度。影响测量结果精度的因素有多种,因此,测量不确定度一般包括若干个分量,将这些分量合成后的不确定度,叫作合成标准不确定度,用 u_c 表示。u_c 也是单一的标准差形式,对正态分布而言,置信概率只有68%。在一些重要的测量中,要求给出较高的置信概率,为此需采用扩展不确定度 U_p(下标 p 表示置信概率),它是合成标准不确定度 u_c 的倍数。即:

$$U_p = ku_c$$

k 为包含因子(置信系数),一般取2~3,k 值不同,置信概率也不同。这种形式,与前面讲的极限测量误差 $\delta_{\lim}$ 有相似之处。一般测量结果就表示为 $y \pm U_p$,y 为被测量值的估计值。

三、标准不确定度的评定

评定不确定度,实际上就是对测量结果的质量进行评定。不确定度按其评定方法分为A,B两类,可用 u_A,u_B 表示两类方法评定的不确定度。

1. A类标准不确定度的评定

A类不确定度是用统计分析方法评定的不确定度。即对某被测量值进行等精度的独立的多次重复测量,得出一系列测得值 x_i(即测量列)。通常是以测量列的算术平均值 $\bar{x}$ 作为被测量值的估计值,以 $\bar{x}$ 的标准差 $s_{\bar{x}}$(即 $\sigma_{\bar{x}}$)作为测量结果的A类标准不确定度 u_A。

$s_{\bar{x}}$ 的具体计算方法,前面第二章中已有详细介绍,这里不再重复,单次测量的标准差 $s(\sigma_s)$ 值一般是用贝塞尔公式计算。重复测量次数 n 越多,A类不确定度的评定越可靠,一般 n 应大于5。当A类不确定度分量占合成标准不确定度的份量较大时,n 应大一些,相反可小一

些。

2. B类标准不确定度的评定

B类不确定度是用不同于A类评定的方法，即用非统计分析的方法评定的不确定度。B类评定方法在实际工作中应用很多，因为有的不确定度无法用A类评定，或虽可用A类评定，但不经济可行，另外，还有A类评定不能包括的分量。

(1) B类评定的信息来源

B类评定要利用能反映测得值 x_i 分布变化的有关信息和资料，其主要来源如下：

① 以前的测量数据；

② 对有关技术资料和对测量仪器特性的了解和经验；

③ 生产部门或研究部门提供的技术说明文件，包括测量仪器的精度资料；

④ 校准证书、检定证书或其他文件提供的数据及准确度等级，包括目前暂时还在使用的极限测量误差值等；

⑤ 技术手册或某些可靠资料给出的参考数据及其不确定度等等。

利用以上资料进行B类标准不确定度评定时，要求评定者具有一定的分析能力和经验，能根据不同的信息资料作相应的处理。

(2) B类评定的概率分布估计

进行B类评定时，常需分析实际情况，对测量值作出分布估计。常用的分布有以下几种：

① 正态分布

测得值的分布一般多服从正态分布。许多次重复测量测得值的算术平均值，按正态分布；被测值 Y 给出扩展不确定度，而对其分布又没有特殊说明时，估计值 y 可按正态分布对待。当测量值受到多个独立误差因素的影响，且影响的大小相近，亦估计为正态分布。

对已知扩展不确定度 U_p 和置信概率 p 的正态分布，其B类标准不确定度 u_B 为

$$u_B = \frac{U_p}{k}$$

式中 k 为包含因子，根据置信概率 p，查正态分布表(附录表1)，要注意 U_p 和 u_B 均为正态分布置信区间的半宽。常用的 p 与 k 的关系见表7—1。

表7—1　　正态分布情况下 p 与 k 的关系

置信概率 p(%)	50	68.27	90	95	95.45	99	99.73
包含因子 k	0.670	1	1.645	1.960	2	2.576	3

② t 分布

如已知扩展不确定度 U_p 和置信概率 p 之外，还给出了有效自由度 ν，则必须按 t 分布处理。B类标准不确定度 u_B 为

$$u_B = \frac{U_p}{t_p(\nu)}$$

$t_p(\nu)$ 查 t 分布表，即附录表2中的 t_α。

例如校准证书上给出标准值为500 g的砝码的实际质量 $m = 500.000\ 78$ g，并给出 m 的测量结果的扩展不确定度 $U_{95} = 48$ mg(置信概率为0.95)，有效自由度为30。查 t 分布表知

$t_{95}(30)=2.04$,故 B 类标准不确定度为：

$$u_B=\frac{U_{95}}{t_{95}(\nu)}=\frac{48}{2.04}=24\ \mathrm{mg}$$

③ 均匀(矩形)分布

若知测量估计值 x 落在区间$(x-a,\ x+a)$内的概率为 1,且在区间内各处出现的概率相等,则 X 服从均匀分布,其标准不确定度 u_B 为

$$u_B=\frac{a}{\sqrt{3}}\qquad(k=\sqrt{3})$$

以下各因素产生的测得值分散,均为均匀分布:数据修约;数字式测量仪器对示值量化(分辨力)的影响;测量仪器的滞后和摩擦效应;按"级"使用的数字式仪表及仪器的最大允许误差;测量仪器度盘或齿轮的回程误差;平衡指示器调零不准确等等。

④ 三角分布

当已知测量估计值 x 落在区间$(x-a,\ x+a)$内的概率为 1,且估计值受到两个独立的相同或相近的且具有均匀分布的因素影响,则 x 服从三角分布,其标准不确定度 u_B 为

$$u_B=\frac{a}{\sqrt{6}}\qquad(k=\sqrt{6})$$

两个相同均匀分布的合成,即形成三角分布。

⑤ 反正弦分布(U 形分布)

度盘偏心引起的测角误差以及正弦振动引起的位移变化等,均将使测量估计值 x 服从反正弦分布。如 x 在区间$(x-a,x+a)$内的概率为 1,则其标准不确定度 u_B 为

$$u_B=\frac{a}{\sqrt{2}}\qquad(k=\sqrt{2})$$

(3) 计量器具的 B 类标准不确定度

计量器具的测量不确定度,在合成不确定度中常占有重要的地位。如进行 A 类评定,计量器具的不确定度分量常能全部或大部分反映出来,这时只要注意分析鉴别出那些在多次重复测量中不能反映出来的计量器具的影响分量,另作 B 类评定,如微差比较测量中量块的检定误差的影响等。

如对计量器具的标准不确定度做 B 类评定,则应注意:

① 对按"级"使用的计量器具

实际工作中,测量仪器按"级"使用的居多。

当计量器具检定证书上给出准确度级别时,可按检定规程所规定的该级别的最大允许误差±A 进行评定。一般采用均匀分布,得到示值允差引起的标准不确定度分量为

$$u_B=\frac{A}{\sqrt{3}}$$

这样计算的 u_B 不包括检定该器具时所用高级别的计量器具的不确定度带来的影响。如不能忽略不计时,还要考虑这一项不确定度分量。

u_B 包括了计量器具长期稳定性的影响。只要使用的环境条件不超出允许的范围,就不必考虑环境条件引起的不确定度分量。

② 对按“等”使用的计量器具

当计量器具的检定证书上给出准确度等别时，可按检定规程所规定的该等别的测量不确定度大小，按前面正态分布或 t 分布的方法计算标准不确定度分量。其中已包含检定该器具时所用高等别计量器具的不确定度的影响。

当使用该计量器具的环境条件偏离参考条件或检定时的环境条件时，要考虑环境条件引起的不确定度分量。

这类计量器具使用时要对示值进行修正，量具要使用其实际值。所以要考虑器具长期稳定性的影响，通常是把两次检定周期之间的示值的差值，作为不确定度的一个分量，除非上一等证书给出的不确定度已考虑了这一问题。

四、测量不确定度的合成

用 A 类、B 类方法评定的标准不确定度 u_i 有许多个，要将其合成为一个合成标准不确定度 u_c，以评定测量结果的质量。各标准不确定度 u_i 及合成后的 u_c 都是以标准差表示的，所以它们的合成计算应采用标准差的合成公式(见第六章)。

若 N 个分量因素对测量结果的影响都是直接的，则有：

$$u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2 + \sum_{i \neq j}^{N} \rho_{ij} u_i u_j}$$

式中： ρ_{ij}——任意两分量 u_i，u_j 的相关系数。

如各个分量都是独立的，则 $\rho_{ij}=0$，上式即为

$$u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} u_i^2}$$

若各分量对测量结果的影响是间接的，有某种函数关系，如被测量 Y 的估计值 y 是由 N 个其他直接测得值 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 的函数求得，即

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

则估计值 y 的合成标准不确定度 u_{cy} 为

$$u_{cy} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (u_{x_i})^2 + \sum_{i \neq j}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} \rho_{ij} u_{x_i} u_{x_j}}$$

式中： $\frac{\partial f}{\partial x_i}$，$\frac{\partial f}{\partial x_j}$——传递系数，亦称灵敏系数；

ρ_{ij}——任意两直接测得值 x_i 与 x_j 的标准不确定度 u_{x_i} 与 u_{x_j} 的相关系数。

如 u_{x_i} 与 u_{x_j} 不相关(多数情况如此)，相互独立，则 $\rho_{ij}=0$，于是上式可简化为

$$u_{cy} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 (u_{x_i})^2}$$

对不确定度分量进行合成时，应全面分析影响测量结果的各种因素。最好列出影响测量结果的所有不确定度分量的来源。对不能忽略的分量，要不重复，不遗漏。

五、测量结果及其测量不确定度的表达

完整的测量结果应有两个基本量，一是被测量 Y 的最佳估计值 y，一般用测量列数据的算

术平均值;另一为描述该测量结果的分散性的量,即测量不确定度。

测量不确定度有以下两种表示方式:

1. 用合成标准不确定度表示

其适用范围是诸如基础计量学研究以及量值的国际比对等重要场合(因为扩展不确定度的包含因子 k 有时选择得不够严格)。同时还要有信息足够的说明,主要内容见国家计量技术规范 JJF1059—1999《测量不确定度评定与表示》中的第 8.3 条。[1]

2. 用扩展不确定度表示

适用于一般精密测量。扩展不确定度 U_p 等于合成标准不确定度 u_c 乘以包含因子 k,即

$$U_p = k \cdot u_c$$

测量结果表示为 $y \pm U_p$,y 为被测量值的估计值。

当测得值可作服从正态分布或近似正态分布的估计时,可取 $k=2\sim3$,大多数情况取 $k=2$,即相应的置信概率为 95%,这是 ISO 的一些标准中推荐的。如 k 取 3,则置信概率为 99%,当服从正态分布,而且重复测量次数 $n\to\infty$ 时,置信概率为 99.73%。

如果可以确定测得值不是正态分布,则不能按 $k=2\sim3$,并取上述置信概率来计算。如测得值近似于均匀分布,则 k 与 U_p 之间的关系如下:

① 对于 U_{95}, $k=1.65$;

② 对于 U_{99}, $k=1.71$;

U_{95},U_{99}是表示不确定度对应置信概率的规定写法,不能写成 $U_{0.95}$,$U_{0.99}$。

从理论上分析,包含因子 k 应由 t 分布的临界值 $t_p(\nu)$ 给出,即

$$k = t_p(\nu)$$

$t_p(\nu)$ 即附录表 2 中的 t_α,根据置信概率 p 和合成标准不确定度 u_c 的自由度 ν 查表。ν 由下式,即由韦尔奇-萨特恩韦特(Welch-Satterthwaite)公式计算:

$$\nu = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4}{\nu_i}}$$

式中: ν_i——各标准不确定度分量 u_i 的自由度。

由于各不确定度分量的自由度 ν_i 有时难于全面掌握和确定,所以一般测量可不给出自由度,而是按前面介绍的那样,直接取 $k=2$ 或 3。

对工业生产和商贸等大量的日常测量,一般不要求提供测量不确定度,但前提条件是所用计量器具是经过检定并处于合格状态。

在给出测量结果的不确定度数值时,最多只能有两位有效数字,且要与被测量值的估计值 y 的位数一致对齐,多余的要作修约处理。如 y 为 10.057 6 mm,U 为 0.027 mm,则 10.057 6 要修约成 10.058。

这里要注意,当不确定度的有效数字按一般"四舍五入"规则(见第一章)由两位修约为一位时,如第一位数字较小,将会导致较大的修约误差。如将 0.14 修约为 0.1,其误差将达到 40%,所以当不确定度的第一位有效数字为 1 和 2 时,应保留两位有效数字,大于 3 时,

---

[1] 也适用于新仪器生产鉴定及大宗商贸索赔等重要测量。

可保留一位或两位。如 0.34 修约为 0.3，误差就只有 13% 了。有的国家还专门对此作出了规定。

六、测量不确定度与极限测量误差的比较

测量不确定度和极限测量误差都是评定测量结果质量的参数。扩展不确定度 U_p 与极限测量误差 δ_{lim} 相似，都是以标准差为基础再乘以与一定置信概率相应的包含因子(置信系数)确定其值。测量不确定度不是误差，误差是测得值与真值(约定真值)的差值，而不确定度是表征被测值的分数性的半区间。极限测量误差实质上也不是误差，也是一个误差可能的分散区间。

两者的主要区别是评定方法。极限测量误差一直没有法定统一的评定方法，传统的方法是区别随机误差和系统误差(不定系统误差)，分别合成后再两者相合成，且有概念欠清晰的将不定系差按随机误差处理的观点。

系统误差与随机误差有时难以区分，且两者在一定条件下会互相转化。测量不确定度摒弃了系统误差与随机误差合成的概念，而采用用统计分析(A 类)和非统计分析(B 类)两种评定方法。将系统误差和随机误差引起的不确定度的分散分别称为系统效应和随机效应，两种效应产生的不确定度分量，在一定条件下，可以都用 A 类方法评定，也可都用 B 类方法评定。两种评定方法不分优劣，可按实际可能性来选用。

由于不确定度的评定可不考虑影响不确定度因素的性质，只考虑其影响结果，从而简化了分类，便于评定和计算，且易于理解，实用方便。

测量不确定度的评定与表达，要认真贯彻执行 JJF1059—1999《测量不确定度评定与表示》。

测量不确定度有一些问题有待进一步完善与发展，如 B 类评定时不确定度分量的分布估计，有时因信息不足难于处理等。

§7—3　测量不确定度的评定和表示应用示例

测量不确定度的评定和表示一般步骤如下：

(1) 根据测量任务，分析和明确测量不确定度的来源，列出对测量结果有明显影响的不确定度分量；

(2) 用 A 类、B 类方法评定各标准不确定度分量 u_i，必要时给出全部分量的自由度；

(3) 分析 u_i 的相关性，如相关，则确定各相关系数 ρ_{ij}，但尽可能设法避免相关；以简化计算；

(4) 求测量结果的合成标准不确定度和扩展不确定度；

(5) 作出测量不确定度报告。

下面举例说明：

例 7—1　在恒温室内用卧式测长仪测量基本尺寸为 ϕ100 mm 的轴径 d，按仪器检定证书，仪器玻璃标尺在 100 mm 处的修正值 C 为 +1.2 μm。对轴径做 10 次重复测量，结果列于表 7—2，要求给出完整的测量结果。

解：在测量过程中，除仪器本身的重复性影响测量不确定度外，还有以下影响因素：

(1) 在测直径过程中，找对最大示值位置的随机效应导致的不确定度分量；

(2) 在被测直径一侧对零的不确定度分量；

(3) 在另一侧读数的不确定度分量。

但由 10 次独立重复测量的数据计算出来的标准不确定度 u_A(A 类不确定度)，已包括了以上 3 项因素的影响，故不用再对这些分量进行评定和重复合成。测量是在条件良好的恒温室内进行，被测件和仪器测量前经过衡温处理，故温度变化对不确定度的影响很微小，可忽略不计。因此合成标准不确定度可由测得数据直接计算得出。

表 7—2　　示例的测得数据和计算

测量序号	测得数据 d /mm	残差 $v = d_i - \bar{d}$ /μm	v^2/μm²
1	100.001 0	−1.0	1
2	100.001 4	−0.6	0.36
3	100.003 0	+1.0	1
4	100.002 0	0	0
5	100.001 6	−0.4	0.16
6	100.002 0	0	0
7	100.002 5	+0.5	0.25
8	100.003 0	+1.0	1
9	100.001 5	−0.5	0.25
10	100.002 0	0	0
	$\bar{d} = 100.002\ 0$	$\sum_{1}^{10} v_i = 0$	$\sum_{1}^{10} v_i^2 = 4.02$

加修正值 C 后的平均轴径为

$$d = \bar{d} + C = 100.002\ 0 + 0.001\ 2 = 100.003\ 2\ \text{mm}$$

单次测量的标准差 s_d 为

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{4.02}{10-1}} = 0.67\ \mu\text{m}$$

算术平均值 $\bar{d}$ 的标准差 $s_{\bar{d}}$ 即标准不确定度 $u_{\bar{d}}$ 为

$$u_{\bar{d}} = s_{\bar{d}} = \frac{s_d}{\sqrt{n}} = \frac{0.67}{\sqrt{10}} = 0.2\ \mu\text{m}$$

$u_{\bar{d}}$ 的自由度 ν 为 $n - 1 = 10 - 1 = 9$。

以置信概率 $p = 0.95$ 给出扩展不确定度 U_{95}，查 t 分布表(附录表 2)，得

$$t_p(\nu) = t_{95}(9) = 2.26$$

于是有

$$U_{95} = t_{95}(9) \times u_{\bar{d}} = 2.26 \times 0.2 \approx 0.5\ \mu\text{m}$$

最后测量结果为

$$d = (100.003\,2 \pm 0.000\,5)\ \text{mm}$$

如在上述测量后不久又在该仪器上测量另一 $\phi 80$ mm 的轴径，只测 1 次，测得值 d_1 为 80.003 mm，玻璃标尺上 80 mm 处的修正值 C 为 $-0.8\ \mu$m。即轴径 d 为

$$d = d_1 + C = 80.003 - 0.000\,8 = 80.002\,2\ \text{mm}$$

其标准不确定度可用 B 类方法确定，即引用上次用 A 类方法得到的单次测量的标准差 s_d：

$$s_d = u_d = 0.67\ \mu\text{m}$$

自由度仍为 $\nu = 9$，置信概率取 0.95，$t_{95}(9)$ 为 2.26。于是扩展不确定度 U_{95} 为

$$U_{95} = 2.26 \times 0.67 = 1.5\ \mu\text{m}$$

最后测量结果为

$$d = (80.002\,2 \pm 0.001\,5)\ \text{mm}, p = 0.95。$$

例 7—2 先用分度值为0.01 mm 的 0 级千分尺直接测量圆柱体的直径 d 和高度 h（d 和 h 的基本尺寸均为 10 mm）各 6 次，再计算圆柱体体积 V，并给出最后测量结果。

解：(1) 测得值的处理

测得值列于表 7—3。

表 7—3 示例的测得值 (mm)

直径 d	10.085	10.085	10.090	10.080	10.085	10.080
高度 h	10.105	10.115	10.115	10.110	10.110	10.105

d 和 h 的平均值分别为

$$\bar{d} = 10.084\ \text{mm};\ \bar{h} = 10.110\ \text{mm}$$

计算体积 V：

$$V = \frac{\pi d^2 h}{4} = \frac{3.141\,6 \times 10.084^2 \times 10.110}{4} = 807.4\ \text{mm}^3$$

按贝塞尔式计算 $\bar{d}$ 和 $\bar{h}$ 的标准差分别为

$$s_{\bar{d}} = 1.54 \approx 1.5\ \mu\text{m};\ s_{\bar{h}} = 1.82 \approx 1.8\ \mu\text{m}$$

(2) 测量不确定度各分量的分析评定

对体积 V 的测量不确定度的影响因素主要有：

① 对直径 d 和高度 h 重复测量引起的不确定度。其算术平均值的标准不确定度 $u_A(\bar{d})$ 和 $u_A(\bar{h})$ 分别为

$$u_A(\bar{d}) = s_{\bar{d}} = 1.5\ \mu\text{m}$$

$$u_A(\bar{h}) = s_{\bar{h}} = 1.8\ \mu\text{m}$$

式中，下标 A 表示用 A 类方法评定。

② 千分尺示值误差引起的不确定度。其标准不确定度对直径 d 和高度 h 分别为 $u_B(\bar{d})$ 和 $u_B(\bar{h})$，下标 B 表示用 B 类方法评定。

查检定规程，测 10 mm 尺寸时 0 级千分尺的示值误差为 $\pm 2\ \mu$m，按均匀分布估计，分布区间的半宽 $a = 2\ \mu$m，其标准不确定度为

$$u_B(\bar{d}) = u_B(\bar{h}) = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.15 \approx 1.2\ \mu m$$

③ 测量是在(20±5)℃的温度环境下进行的。千分尺和被测圆柱体的温差不超过1℃,故温度变化引起的不确定度分量很小,可忽略不计。

④ 函数关系式中的近似数 π 取 3.1416,其修约误差很微小,可忽略不计。

按以上分析,可计算直径 d 和高度 h 的算术平均值的合成标准不确定度 $u_c(\bar{d})$和 $u_c(\bar{h})$如下:

$$u_c(\bar{d}) = \sqrt{u_A(\bar{d})^2 + u_B(\bar{d})^2}$$
$$= \sqrt{1.5^2 + 1.2^2} = 1.9\ \mu m$$
$$u_c(\bar{h}) = \sqrt{u_A(\bar{h})^2 + u_B(\bar{h})^2}$$
$$= \sqrt{1.8^2 + 1.2^2} = 2.16 \approx 2.2\ \mu m$$

(3) 计算体积 V 的合成标准不确定度 $u_c(V)$

$$u_c(V)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial d}\right)^2 \cdot u_c(\bar{d})^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \cdot u_c(\bar{h})^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{\pi dh}{2} = \frac{\pi \times 10 \times 10}{2} = 157.1\ mm^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 10^2}{4} = 78.6\ mm^2$$

于是有:

$$u_c(V) = \sqrt{157.1^2 \times 0.001\,9^2 + 78.6^2 \times 0.002\,2^2}$$
$$= \sqrt{0.089 + 0.030} = 0.35\ mm^3$$

(4) 给出最后测量结果

对一般精度的测量,可不计算自由度。计算扩展不确定度 U_p 取包含因子 $k=2$,相应的置信概率为 0.95。

$$U_{95} = 2u_c(V) = 2 \times 0.35 = 0.7\ mm^3$$

最后测量结果为

$$V = (807.4 \pm 0.7)\ mm^3,\ p = 0.95$$

第八章　最小二乘法和组合测量

§8—1　最小二乘法原理

为了说明最小二乘法的基本原理，我们先举一个求标准米尺温度膨胀系数的例子。

米尺长度：$L=L_0(1+\alpha t+\beta t^2)$。这里，$L_0$ 为米尺在0℃时的精确长度；α,β 为米尺的温度膨胀系数。

我们在不同温度 t_i 条件下测出一系列 L 值，再据以求 α 与 β 值。为了醒目起见，以 x,y 来代表 α,β 两个未知的待求量，于是有

$$L=L_0(1+tx+t^2y)$$

进一步改写为一般形式：

$$L=ax+by+c$$

或

$$L=f(x,y,a,b,c)$$

式中，L,a,b,c 为可测量和经简单计算即可知道的量；x,y 为待求量。

设对 L 和 t 各测取 n 个值，当已知 L_0 时，即可计算出 n 组相应的 a,b,c 值（$a=L_0t$；$b=L_0t^2$；$c=L_0$），于是可得条件方程组（或称测量方程组）如下：

$$\left.\begin{aligned}L_1&=f(x,y,a_1,b_1,c_1)\\L_2&=f(x,y,a_2,b_2,c_2)\\&\vdots\\L_n&=f(x,y,a_n,b_n,c_n)\end{aligned}\right\}\qquad(8\text{—}1)$$

方程组中有 x,y 两个（一般为 m 个）未知量，从方程组可看出：

(1) 当 $n<m$，方程有无穷多个解。

(2) 当 $n=m$，方程只有唯一解。

(3) 当 $n>m$，则任选其中 m 个方程式即可求出 m 个未知量。若取值绝对精确（不管测多少次，结果不变），则所求出的解也将是唯一的，即代入其余 $n-m$ 个方程式也能满足。但事实上因为不可避免地有测量误差存在，故将各测得值及求得的解代入其余各式后，并不能满足 $L-f(x,y,a,b,c)=0$。不过在 $n>m$ 的情况下，仍可找到一组最佳的或最恰当的解，将其代入各方程式后，虽不能使 $L-f(x,y,a,b,c)=0$，但却是与零相差很微小的 v 值（v 仍可称为残差），从方程组整体上看，这一组解可以是误差最小的唯一解。

当考虑了测量误差之后，将各测量值代入式(8—1)，可写出如下误差方程组：

$$\left.\begin{aligned}l_1-L_1&=l_1-f(x,y,a_1,b_1,c_1)=v_1\\l_2-L_2&=l_2-f(x,y,a_2,b_2,c_2)=v_2\\&\vdots\\l_n-L_n&=l_n-f(x,y,a_n,b_n,c_n)=v_n\end{aligned}\right\}\qquad(8\text{—}2)$$

式中，$L_1, L_2, \cdots, L_n$ 为需要直接测量的量值的待求估计值，$l_1, l_2, \cdots, l_n$ 为相应的有误差的实际测得值。

如要得到如上所述的一组最佳解，既从整体上看误差最小，其条件是式(8—2)中各方程式的残差 v_i 的平方和为最小，即

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \text{最小}$$

也就是说，任取另一组解，其 $\sum_{i=1}^{n} v'^2_i$ 都将大于 $\sum_{i=1}^{n} v_i^2$。这就是最小二乘法最基本的概念，应用最小二乘法时，要注意误差数据必须是无偏的，即没有系统误差，相互独立，且服从正态分布，这是用最小二乘法确定最佳估计值的前提条件。

设对某 x 值进行 n 次等精度测量，得一系列测得值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，相应的残差 $v_1 = x_1 - \bar{x}, v_2 = x_2 - \bar{x}, \cdots, v_n = x_n - \bar{x}$。$\bar{x}$ 为 x_i 的算术平均值，标准差为 σ。误差落在 $v_i \sim v_i + dv$ 范围内的概率 P_i 为

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v_1^2}{2\sigma^2}} dv \\ P_2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v_2^2}{2\sigma^2}} dv \\ &\vdots \\ P_n &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v_n^2}{2\sigma^2}} dv \end{aligned}\right\}$$

因为误差相互独立，根据概率乘法定理，误差 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 同时出现的概率 P 应为

$$\begin{aligned} P &= P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)} (dv)^n \end{aligned}$$

按概率论的最大或然原理，测量结果的最可信赖值，应该是出现的机会最多的那个数值，也就是出现的概率 P 为最大时所求得的数值。可以这样来理解，按随机误差特性，小误差出现的概率大于大误差出现的概率，因此，概率越大的测量值，就越可信赖。要使 P 最大的条件，就是上式中负指数的分子$(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2)$为最小，即

$$\sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \text{最小}$$

这样就证明了最小二乘原理。

对于不等精度测量，可设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的标准差分别为 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$。代入上式得：

$$\begin{aligned} P &= P_1 P_2 \cdots P_n \\ &= \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n (\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{v_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{v_2^2}{\sigma_2^2}\right) + \cdots + \frac{v_n^2}{\sigma_n^2}} (dv)^n \end{aligned}$$

P 为最大的条件为

$$\frac{v_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{v_2^2}{\sigma_2^2}+\cdots+\frac{v_n^2}{\sigma_n^2}=\text{最小}$$

因相应的权比为 $p_1:p_2:\cdots:p_n=\frac{1}{\sigma_1^2}:\frac{1}{\sigma_2^2}:\cdots:\frac{1}{\sigma_n^2}$,故有

$$p_1v_1^2+p_2v_2^2+\cdots+p_nv_n^2=\sum_{i=1}^{n}p_iv_i^2=\text{最小}$$

按此条件求出来的最可信赖值,即为加权平均值(参看第五章)。

§8—2 最小二乘法的基本运算

最小二乘法主要用于线性函数,对非线性函数,必须在一定区域内展开成线性函数来处理,这一点后面还要讲到。在实际测量工作中,经常遇到的大量问题,也都属线性性质,因此,我们着重讨论线性函数的问题。

一、等精度测量线性函数的最小二乘法处理

线性函数的测量方程组(条件方程组)一般有如下形式:

$$\left.\begin{aligned}Y_1&=a_{11}X_1+a_{12}X_2+\cdots+a_{1m}X_m\\Y_2&=a_{21}X_1+a_{22}X_2+\cdots+a_{2m}X_m\\&\vdots\\Y_n&=a_{n1}X_1+a_{n2}X_2+\cdots+a_{nm}X_m\end{aligned}\right\}\tag{8—3}$$

式中,$X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为待求量值;$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 为直接测量的量值。它们相应的估计值亦有下列函数关系:

$$\left.\begin{aligned}y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m\\y_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m\\&\vdots\\y_n&=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m\end{aligned}\right\}\tag{8—4}$$

相应的误差方程组为:

$$\left.\begin{aligned}l_1-y_1&=l_1-(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m)=v_1\\l_2-y_2&=l_2-(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m)=v_2\\&\vdots\\l_n-y_n&=l_n-(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m)=v_n\end{aligned}\right\}\tag{8—5}$$

式中,$l_1,l_2,\cdots,l_n$ 为有误差的实测值。

以上线性方程组(式 8—5)可用矩阵表示:

$$L - A\hat{X} = V \tag{8—6}$$

式中：系数矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$

估计值矩阵 $\hat{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

实测值矩阵 $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$

残差矩阵 $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

由于有

$$(v_1\ v_2 \cdots v_n)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = [v^2]$$ ●

故有

$$V'V = 最小 \tag{8—7}$$

或

$$(L - A\hat{X})'(L - A\hat{X}) = 最小 \tag{8—8}$$

要满足式(8—7)或式(8—8)，只有使

$$\frac{\partial[v^2]}{\partial x_1} = 0;\ \frac{\partial[v^2]}{\partial x_2} = 0;\ \cdots;\frac{\partial[v^2]}{\partial x_m} = 0$$

从而得到 m 个新的方程式，叫作“正规方程组”或“法方程组”。解正规方程组，得出唯一的一组解，即为符合最小二乘原理的最佳解。先看

$$\frac{\partial[v^2]}{\partial x_1} = \frac{\partial[v_1^2]}{\partial x_1} + \frac{\partial[v_2^2]}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial[v_n^2]}{\partial x_1} = 0$$

按式(8—5)有

● [ ]在这里称为高斯符号，表示同类项之和。例如，$[v^2] = v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2$。此符号在较繁杂的数据处理中常用到。

$$\frac{\partial[v_1^2]}{\partial x_1}=2a_{11}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m-l_1)$$

$$\frac{\partial[v_2^2]}{\partial x_1}=2a_{21}(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m-l_2)$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial[v_n^2]}{\partial x_1}=2a_{n1}(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m-l_n)$$

以上各式相加,得:

$$\frac{\partial[v^2]}{\partial x_1}=2\{[a_1a_1]x_1+[a_1a_2]x_2+\cdots+[a_1a_m]x_m-[a_1l]\}=0$$

又
$$\frac{\partial^2[v^2]}{\partial x_1^2}=2[a_1a_1]>0$$

即二阶偏导数为正,故有最小值。

同理可求得 $\frac{\partial[v^2]}{\partial x_2},\frac{\partial[v^2]}{\partial x_3},\cdots,\frac{\partial[v^2]}{\partial x_m}$。

整理后得:

$$\left.\begin{aligned}
&[a_1a_1]x_1+[a_1a_2]x_2+\cdots+[a_1a_m]x_m=[a_1l]\\
&[a_2a_1]x_1+[a_2a_2]x_2+\cdots+[a_2a_m]x_m=[a_2l]\\
&\qquad\vdots\\
&[a_ma_1]x_1+[a_ma_2]x_2+\cdots+[a_ma_m]x_m=[a_ml]
\end{aligned}\right\}\qquad(8\text{—}9)$$

方程组(8—9)即为等精度测量的线性函数最小二乘估计的正规方程。它在形式上有以下特点:

(1) 主对角线上的各元素均为正。$[a_1a_1],[a_2a_2],\cdots,[a_ma_m]$均自乘。

(2) 其余元素对主对角线两两对称相等,即$[a_2a_1]$与$[a_1a_2],\cdots,[a_ma_1]$与$[a_1a_m]$都相等。

方程组(8—9)还可进一步简化,任取一方程式 i,即

$$[a_ia_1]x_1+[a_ia_2]x_2+\cdots+[a_ia_m]x_m-[a_il]=0$$

将其展开再归纳后得:

$$\begin{aligned}
&(a_{1i}a_{11}x_1+a_{2i}a_{21}x_1+\cdots+a_{ni}a_{n1}x_1)+\cdots+\\
&(a_{1i}a_{1m}x_m+a_{2i}a_{2m}x_m+\cdots+a_{ni}a_{nm}x_m)-\\
&(a_{1i}l_1+a_{2i}l_2+\cdots+a_{ni}l_n)\\
=\ &a_{1i}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m-l_1)+\\
&a_{2i}(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m-l_2)+\cdots+\\
&a_{ni}(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m-l_n)\\
=\ &a_{1i}v_i+a_{2i}v_i+\cdots+a_{ni}v_i=0
\end{aligned}$$

由此可将正规方程组(8—9)写成以下较简明的形式,即

$$\left.\begin{aligned} a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n &= 0 \\ a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{1m}v_1 + a_{2m}v_2 + \cdots + a_{nm}v_n &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8—10}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = 0$$

即

$$A'V = 0 \tag{8—11}$$

由式(8—6)有

$$A'(L - A\hat{X}) = 0$$

$$(A'A)\hat{X} = A'L$$

$$\hat{X} = (A'A)^{-1}A'L \tag{8—12}$$

上式即为最小二乘估计的矩阵解。

例 8—1 为研究 ϕ20mm 轴的几何形状误差，在 40mm 长度内选 5 个断面测得直径偏差 Δd 如表 8—1，试确定沿长度方向形状误差的规律。

表 8—1 **例 8—1 数 据 表**

被测断面距端面距离 L_i/mm	2	10	20	30	40
直径偏差 Δd /μm	+3	+5	+8	+15	+18

解：先将$(L_i, \Delta d)$以坐标点形式标注在图 8—1 上，经初步分析即知误差呈线性规律。

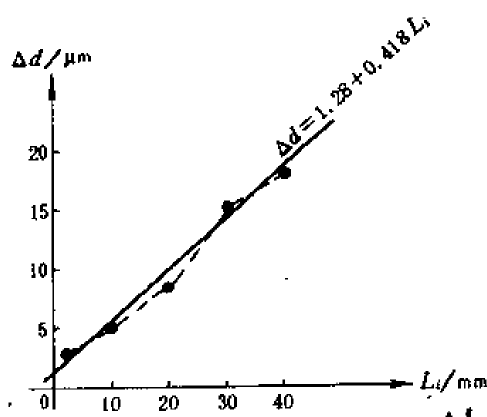


图 8—1

设此规律的线性方程为

$$\Delta d = x + L_i y$$

或

$$\Delta d - (x + L_i y) = 0$$

其测量方程式组为

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 3 &= 0 \\ x + 10y - 5 &= 0 \\ x + 20y - 8 &= 0 \\ x + 30y - 15 &= 0 \\ x + 40y - 18 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

其正规方程按式(8—9)为

$$\left.\begin{aligned} [a_1a_1]x + [a_1a_2]y &= [a_1l] \\ [a_2a_1]x + [a_2a_2]y &= [a_2l] \end{aligned}\right\}$$

这里 $[a_1a_1] = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 5$

$[a_2a_1] = [a_1a_2] = 1 \times 2 + 1 \times 10 + 1 \times 20 + 1 \times 30 + 1 \times 40 = 102$

$[a_2a_2] = 2^2 + 10^2 + 20^2 + 30^2 + 40^2 = 3\,004$

$[a_1l] = 1 \times 3 + 1 \times 5 + 1 \times 8 + 1 \times 15 + 1 \times 18 = 49$

$[a_2l] = 2 \times 3 + 10 \times 5 + 20 \times 8 + 30 \times 15 + 40 \times 18 = 1\,386$

于是有

$$\left.\begin{aligned} 5x + 102y &= 49 \\ 102x + 3\,004y &= 1\,386 \end{aligned}\right\}$$

解得 $x = 1.28 \approx 1.3 \qquad y = 0.418 \approx 0.42$

故结果为

$$\Delta d = 1.3 + 0.42L_i$$

若用矩阵求解,则有

$$A'A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 20 & 30 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 10 \\ 1 & 20 \\ 1 & 30 \\ 1 & 40 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 102 \\ 102 & 3\,004 \end{pmatrix}$$

$$|A'A| = \begin{vmatrix} 5 & 102 \\ 102 & 3\,004 \end{vmatrix} = 4\,616 \neq 0 \text{ (有解)}$$

$$(A'A)^{-1} = \frac{1}{|A'A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4\,616} \begin{pmatrix} 3\,004 & -102 \\ -102 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A'L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 20 & 30 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 49 \\ 1\,386 \end{pmatrix}$$

故

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (A'A)^{-1}A'L$$

$$= \frac{1}{4\,616} \begin{pmatrix} 3\,004 & -102 \\ -102 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 49 \\ 1386 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.28 \\ 0.418 \end{pmatrix}$$

在待定参数较多,方程数目也多的情况下,矩阵解法(可用计算机编程计算)有明显优点。用代数法求解,为避免差错和醒目,可列表计算(参看后面例8—4及参考文献[2][14])。

二、非等精度测量线性函数的最小二乘法处理

对等精度测量,其最小二乘法运算的出发点是

$$[v^2]=\text{最小}$$

而对非等精度测量,则为

$$[pv^2]=\text{最小}$$

式中: p——权。

其矩阵形式为

$$V'PV=\text{最小} \tag{8—13}$$

或

$$(L-A\hat{X})'P(L-A\hat{X})=\text{最小} \tag{8—14}$$

$$P=\begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}(n\times n\text{ 阶权矩阵})$$

式中: $p_i=\dfrac{\sigma^2}{\sigma_i^2}$——各直接测量结果 l_i 的权;

σ^2——单位权的方差;

σ_i^2——各直接测量结果 l_i 的方差。

$$V'PV=(v_1v_2\cdots v_n)\begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}=[pv^2]$$

其他公式的推导方法和原理均与等精度测量相同。

正规方程为

$$\left.\begin{aligned} &[pa_1a_1]x_1+[pa_1a_2]x_2+\cdots+[pa_1a_m]x_m=[pa_1l] \\ &[pa_2a_1]x_1+[pa_2a_2]x_2+\cdots+[pa_2a_m]x_m=[pa_2l] \\ &\vdots \\ &[pa_ma_1]x_1+[pa_ma_2]x_2+\cdots+[pa_ma_m]x_m=[pa_ml] \end{aligned}\right\} \tag{8—15}$$

式中: $[pa_ia_j]=p_1a_{1i}a_{1j}+p_2a_{2i}a_{2j}+\cdots+p_na_{ni}a_{nj}$

$[pa_il]=p_1a_{1i}l_1+p_2a_{2i}l_2+\cdots+p_na_{ni}l_n$

$(i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,m)$

或 $p_1=p_2=\cdots=p_n=1$,则式(8—14)与式(8—8)相同。

式(8—14)还可整理成类似式(8—10)的形式(步骤与式8—9整理成式8—10相同),即

$$\left.\begin{array}{l}p_1a_{11}v_1+p_2a_{21}v_2+\cdots+p_na_{n1}v_n=0\\p_1a_{12}v_1+p_2a_{22}v_2+\cdots+p_na_{n2}v_n=0\\\vdots\\p_1a_{1m}v_1+p_2a_{2m}v_2+\cdots+p_na_{nm}v_n=0\end{array}\right\}\qquad(8-16)$$

若 $p_1=p_2=\cdots=p_n=1$,则式(8—16)与式(8—10)相同。

式(8—16)的矩阵形式为

$$A'PV=0\qquad(8-17)$$

或
$$A'P(L-A\hat{X})=0$$

即
$$A'PA\hat{X}=A'PL$$

正规方程的解,即参数的最小二乘估计值为

$$\hat{X}=(A'PA)^{-1}A'PL\qquad(8-18)$$

若 $p_1=p_2=\cdots=p_n=1$,则式(8—17),(8—18)分别与式(8—11),(8—12)相同。若将各有关参数单位权化,则问题可按等精度测量处理。

三、非线性函数的最小二乘法处理

若函数 $y=f(x_1,x_2,\cdots,x_m)$为非线性函数,则其测量方程、误差方程和正规方程也将都是非线性函数,这样就难以求出符合最小二乘原理的唯一最佳解。因此,对非线性函数是先将其线性化,然后再按线性函数求解。

具体作法是对被测量取近似值 $x_1',x_2',\cdots,x_m'$,其与估计值 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 之间有微小差别δ_i。

$$\left.\begin{array}{l}x_1=x_1'+\delta_1\\x_2=x_2'+\delta_2\\\vdots\\x_m=x_m'+\delta_m\end{array}\right\}\qquad(8-19)$$

这样,只要求得 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_m$,问题即可解决。

当参数较多或无直接确定近似值的经验和把握时,可采用以下方法来确定 x_i'。

(1) 用直接测量结果 $x_{i测}$作为 x_i,这样 δ_i 主要是测量误差,数值很小。

(2) 从误差方程组的 n 个方程式中,任取 m 个比较简单的、计算方便的方程,并令 $v_i=0$(参看式 8—5)。

解方程组

$$l_i-f_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)=0\qquad(i=1,2,\cdots,m)$$

以其诸解作为近似值 x_i',这样 δ_i 也将很小。

将函数在 $x_1',x_2',\cdots,x_m'$处按泰勒公式展开,取一次项,得:

$$f_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)\approx f_i(x_1',x_2',\cdots,x_m')+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0\delta_1+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0\delta_2+\cdots+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_m}\right)_0\delta_m\qquad(i=1,2,\cdots,m)$$

设
$$l_i' = l - f_i(x_1', x_2', \cdots, x_m')$$
$$a_{i1} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0, a_{i2} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0, \cdots, a_{im} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_m}\right)$$

则有以下线性误差方程组：

$$\left.\begin{aligned} l_1' - (a_{11}\delta_1 + a_{12}\delta_2 + \cdots + a_{1m}\delta_m) &= v_1 \\ l_2' - (a_{21}\delta_1 + a_{22}\delta_2 + \cdots + a_{2m}\delta_m) &= v_2 \\ &\vdots \\ l_n' - (a_{n1}\delta_n + a_{n2}\delta_n + \cdots + a_{nm}\delta_m) &= v_n \end{aligned}\right\} \tag{8—20}$$

式(8—20)的形式与式(8—5)相同，然后即可按前面介绍的步骤和公式计算出 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m$。再代入式(8—19)，即得 $x_1, x_2, \cdots, x_m$。

由于函数展开只取一次项，故存在一定的误差，一般此误差很微小，可忽略不计，但必要时仍需进行精确的误差计算。

因非线性函数可以线性化，非等精度测量可通过单位权化的办法转化为等精度测量处理，因此最小二乘法处理的最基本形式是等精度测量的线性参数。

§8—3　最小二乘法处理的精度估计

按最小二乘法计算，得出最佳估计值 $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_m$，其精度虽然比条件相同的常规测量方法为高，但仍有误差存在，$[v^2]$只是最小而不是 v_i 都等于零，所以仍有精度估计的问题。具体内容有两方面：一是直接测量结果 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 的测量精度估计，另一是待定值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的精度估计。

一、直接测量结果的精度估计

对 m 个待定参数的线性函数值进行 n 次等精度测量，得 $l_1, l_2, \cdots, l_n$，其残差为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$。如其标准差为 σ_s，则$\frac{[v^2]}{\sigma_s^2}$是自由度为$(n-m)$的 χ^2 变量(v_i 互相独立，且服从正态分布)。

故有
$$E\left\{\frac{[v^2]}{\sigma_s^2}\right\} = n - m$$

由此可得
$$\sigma_s = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-m}} \tag{8—21}$$

当 $m=1$ 时，就是一般的贝塞尔公式。式(8—21)可用矩阵作严格推证(见本章末)。

例 8—2　求例8—1测直径偏差 Δd 的标准偏差σ_s值。

解：将例 8—1 中求得的 $x=1.3$，$y=0.42$ 代入误差方程组得：

$v_1 = 3-(1.3\times1+0.42\times2) = 0.86$　　$v_1^2 = 0.74$

$v_2 = 5-(1.3\times1+0.42\times10) = -0.50$　　$v_2^2 = 0.25$

$v_3 = 8-(1.3\times1+0.42\times20) = -1.70$　　$v_3^2 = 2.89$

$v_4 = 15-(1.3\times1+0.42\times30) = 1.10$　　$v_4^2 = 1.21$

$$v_5 = 18 - (1.3 \times 1 + 0.42 \times 40) = -0.10 \qquad \frac{v_5 = 0.01}{[v^2] = 5.10}$$

故
$$\sigma_s = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-m}} = \sqrt{\frac{5.1}{5-2}} \approx 1.3\mu m \approx 1\mu m$$

对非等精度测量，标准差为

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{[pv]}{n-m}} \tag{8—22}$$

二、待定值的精度估计

设有待定值 $x_1, x_2, \cdots, x_m$，其相应的标准差为 $\sigma_{s_1}, \sigma_{s_2}, \cdots, \sigma_{s_m}$，$\sigma_{s_i}$ 的计算公式推导很繁琐，(见参考文献[4]，[5])，下面只介绍具体求法。

$\sigma_{s_1} = \sigma_s\sqrt{Q_{11}}, \sigma_{s_2} = \sigma_s\sqrt{Q_{22}}, \cdots, \sigma_{s_m} = \sigma_s\sqrt{Q_{mm}}$。式中，$Q_{ii}$ 为相应的系数；σ_s 为直接测量结果的标准差，即 $\sigma_s = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-m}}$。

一般最小二乘法的正规方程也可写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 + \cdots + k_1x_m + L_1 &= 0 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 + \cdots + k_2x_m + L_2 &= 0 \\ &\vdots \\ a_mx_1 + b_mx_2 + c_mx_3 + \cdots + k_mx_m + L_m &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8—23}$$

式中：$L_1, L_2, \cdots, L_m$——均为常数项。

求 Q_{ii} 时，将以上方程组作如下变动：

(1) 以 Q_{ii} 代替 x_i；

(2) 令 $L_1, L_2, \cdots, L_m$ 均为零；

(3) 第 i 式的右方由零改为 1(其余各式仍等于零不变)。

如求 Q_{11}，就按改动后的下列方程组求解，即

$$\left.\begin{aligned} a_1Q_{11} + b_1x_2 + c_1x_3 + \cdots + k_1x_m &= 1 \\ a_2Q_{11} + b_2x_2 + c_2x_3 + \cdots + k_2x_m &= 0 \\ &\vdots \\ a_mQ_{11} + b_mx_2 + c_mx_3 + \cdots + k_mx_m &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8—24}$$

求 Q_{22}，则按下列方程组计算：

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1 + b_1Q_{22} + c_1x_3 + \cdots + k_1x_m &= 0 \\ a_2x_1 + b_2Q_{22} + c_2x_3 + \cdots + k_2x_m &= 1 \\ &\vdots \\ a_mx_1 + b_mQ_{22} + c_mx_3 + \cdots + k_mx_m &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{8—25}$$

其余求 $Q_{33}, \cdots, Q_{mm}$ 依此类推。

例 8—3 求例8—1中待定参数 x, y 的标准差值。

解: 例 8—1 的正规方程组如下:

$$\left.\begin{aligned}5x+102y=49\\102x+3\,004y=1\,386\end{aligned}\right\}$$

由例 8—2 知直接测量结果的标准差 $\sigma_s=1\mu m$。

先求 Q_{11},即

$$\left.\begin{aligned}5Q_{11}+102y=1\\102Q_{11}+3\,004y=0\end{aligned}\right\}$$

用行列式求解得:

$$Q_{11}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 102\\0 & 3\,004\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & 102\\102 & 3\,004\end{vmatrix}}=\frac{3\,004}{4\,616}=0.651$$

故
$$\sigma_x=\sigma_s\sqrt{Q_{11}}=1\times\sqrt{0.651}\approx0.8\mu m\approx1\mu m$$

再求 Q_{22},即

$$\left.\begin{aligned}5x+102Q_{22}=0\\102x+3\,004Q_{22}=1\end{aligned}\right\}$$

$$Q_{22}=\frac{\begin{vmatrix}5 & 0\\102 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & 102\\102 & 3\,004\end{vmatrix}}=\frac{5}{4\,616}\approx0.001$$

$$\sigma_y=\sigma\sqrt{Q_{22}}=1\times\sqrt{0.001}=0.03\mu m$$

§8—4 组合测量结果的最小二乘法处理

组合测量是指直接或间接测量一定数目的被测量值的不同组合值,求解这些测量结果的正规方程组,来确定这些被测量值的一种测量方法。

具体地说,就是将 m 个($m>1$)被测量值,按 n 个($n>m$)不同的组合形式进行测量,得出 n 个测量方程式,再根据最小二乘法求解被测量值。

组合测量的优点是:由于数据处理应用了最小二乘法,所以求得的结果,是在该测量条件下的最佳值,即测量精度较高。被测量值的组合形式,要根据具体条件和要求来确定,组合的形式越多(即 n 越大),测量结果的精度也越高。

组合测量的缺点是:操作有时较繁,工作量(包括数据处理)也较大。但由于能获得很高的测量精度,故在线纹尺、度盘、多面棱体、砝码等标准器的检定中,都常采用组合测量。此外,如直角尺、平晶等的互检,也可采用组合测量。

下面举例说明具体运算方法。

例 8—4 用组合测量法检定线段$\overline{AB}$,$\overline{BC}$及$\overline{CD}$的长度[图 8—2(a)],并做精度估计。

解: 直接测量如图 8—2(b)所示的 6 个线段,具体结果如表 8—2。

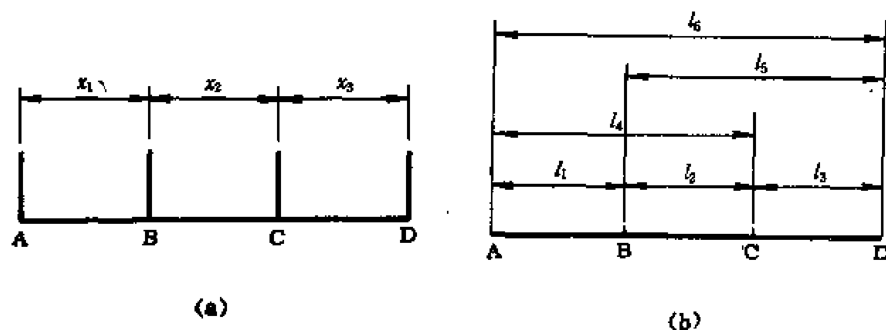


图 8—2

表 8—2 例 8—4 数据表

被测线段	估计值	测得值/mm	误差方程
$\overline{AB}$	x_1	$l_1=1.015$	$l_1-x_1=v_1$
$\overline{BC}$	x_2	$l_2=0.985$	$l_2-x_2=v_2$
$\overline{CD}$	x_3	$l_3=1.020$	$l_3-x_3=v_3$
$\overline{AC}$	x_1+x_2	$l_4=2.016$	$l_4-x_4=v_4$
$\overline{BD}$	x_2+x_3	$l_5=1.981$	$l_5-x_5=v_5$
$\overline{AD}$	$x_1+x_2+x_3$	$l_6=3.032$	$l_6-x_6=v_6$

根据式(8—9),其正规方程为

$$[a_1a_1]x_1+[a_1a_2]x_2+[a_1a_3]x_3=[a_1l]$$
$$[a_2a_1]x_1+[a_2a_2]x_2+[a_2a_3]x_3=[a_2l]$$
$$[a_3a_1]x_1+[a_3a_2]x_2+[a_3a_3]x_3=[a_3l]$$

将各系数及常数项列表计算如表 8—3。

表 8—3 例 8—4 计算数据

i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	l_i	$a_{i1}a_{i1}$	$a_{i1}a_{i2}$	$a_{i1}a_{i3}$	$a_{i1}l_i$	$a_{i2}a_{i2}$	$a_{i2}a_{i3}$	$a_{i2}l_i$	$a_{i3}a_{i3}$	$a_{i3}l_i$
1	1	0	0	1.015	1	0	0	1.015	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0.985	0	0	0	0	1	0	0.985	0	0
3	0	0	1	1.020	0	0	0	0	0	0	0	1	1.020
4	1	1	0	2.016	1	1	0	2.016	1	0	2.016	0	0
5	0	1	1	1.981	0	0	0	0	1	1	1.981	1	1.981
6	1	1	1	3.032	1	1	1	3.032	1	1	3.032	1	3.032
纵向总合Σ					3	2	1	6.063	4	2	8.014	3	6.033

将表中数据代入正规方程组后为

$$\left.\begin{aligned}3x_1+2x_2+x_3&=6.062\\2x_1+4x_2+2x_3&=8.014\\x_1+2x_2+3x_3&=6.033\end{aligned}\right\}$$

解方程组得：

$$x_1=1.028\text{mm};x_2=0.983\text{mm};x_3=1.013\text{mm}$$

此即线段$\overline{AB}$、$\overline{BC}$及$\overline{CD}$在该测量条件下的最佳估计值。

由误差方程组得：

$$v_1=l_1-x_1=1.015-1.028=-0.013$$
$$v_2=l_2-x_2=0.985-0.983=0.002$$
$$v_3=l_3-x_3=1.020-1.013=0.007$$
$$v_4=l_4-(x_1+x_2)=2.016-(1.028+0.983)=0.005$$
$$v_5=l_5-(x_2+x_3)=1.981-(0.983+1.013)=-0.015$$
$$v_6=l_6-(x_1+x_2+x_3)=3.032-(1.028+0.983+1.013)=0.008$$
$$[v^2]=0.000\ 536$$
$$\sigma_s=\sqrt{\frac{[v^2]}{n-m}}=\sqrt{\frac{0.000\ 536}{6-3}}=0.013\ \text{mm}$$

各估计值的标准差σ_{s_i},分别为

$$\sigma_{s_1}=\sigma_s\sqrt{Q_{11}};\sigma_{s_2}=\sigma_s\sqrt{Q_{22}};\sigma_{s_3}=\sigma_s\sqrt{Q_{33}}$$

按式(8—24)求Q_{11},即

$$\left.\begin{aligned}3Q_{11}+2x_2+x_3&=1\\2Q_{11}+4x_2+2x_3&=0\\Q_{11}+2x_2+3x_3&=0\end{aligned}\right\}$$

解方程组得：

$$Q_{11}=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\0&4&2\\0&2&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&2&1\\2&4&2\\1&2&3\end{vmatrix}}=\frac{8}{16}=0.5$$

同法求得：$Q_{22}=0.5$; $Q_{33}=0.5$。于是

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_s\sqrt{0.5}=0.009\text{mm}=9\mu\text{m}$$

例8—5 图8—3为大型直角尺互检的示意图。两被检直角尺Ⅰ和Ⅱ安置在检验平板上，测微表座紧贴在尺Ⅰ的长边工作面上，测头和尺Ⅱ垂直接触，自上而下移动测微表，取其最大与最小示值之差，记为A，则A为尺Ⅰ和Ⅱ的垂直度误差Δ_1与Δ_2的代数和。用4支直角尺互检6次，所得结果(测量方程组)及误差方程组如下。求各尺垂直度误差的最佳估计值。

解：

$$\Delta_1+\Delta_2=A\qquad v_A=A-(\delta_1+\delta_2)$$
$$\Delta_1+\Delta_3=B\qquad v_B=B-(\delta_1+\delta_3)$$
$$\Delta_1+\Delta_4=C\qquad v_C=C-(\delta_1+\delta_4)$$
$$\Delta_2+\Delta_3=D\qquad v_D=D-(\delta_2+\delta_3)$$

$$\Delta_2+\Delta_4=E \qquad v_E=E-(\delta_2+\delta_4)$$
$$\Delta_3+\Delta_4=F \qquad v_F=F-(\delta_3+\delta_4)$$

式中：δ_i——各尺垂直度误差的最佳估计值。

$$[v^2]=(A-\delta_1-\delta_2)^2+(B-\delta_1-\delta_3)^2+(C-\delta_1-\delta_4)^2 \\ +(D-\delta_2-\delta_3)^2+(E-\delta_2-\delta_4)^2+(F-\delta_3-\delta_4)^2$$

令
$$\frac{\partial[v^2]}{\partial\delta_i}=0$$

得正规方程组：

$$\left.\begin{aligned}3\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4&=A+B+C\\ \delta_1+3\delta_2+\delta_3+\delta_4&=A+D+E\\ \delta_1+\delta_2+3\delta_3+\delta_4&=B+D+F\\ \delta_1+\delta_2+\delta_3+3\delta_4&=C+E+F\end{aligned}\right\}$$

将以上 4 式两边各自相加后再除以 6，得：

$$\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4=\frac{A+B+C+D+E+F}{3}$$

以此式分别减上面 4 式可求得：

$$\delta_1=\frac{2(A+B+C)-(D+E+F)}{6}$$
$$\delta_2=\frac{2(A+D+E)-(B+C+F)}{6}$$
$$\delta_3=\frac{2(B+D+F)-(A+C+E)}{6}$$
$$\delta_4=\frac{2(C+E+F)-(A+B+D)}{6}$$

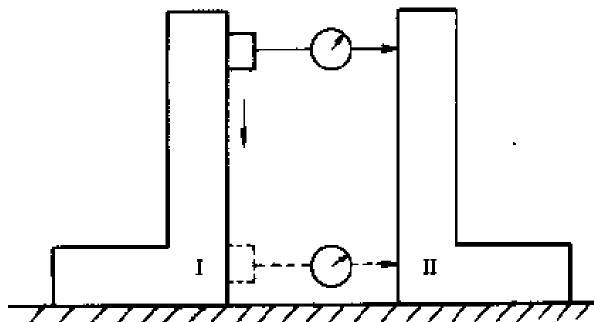


图 8—3

[附]公式 $\sigma_s=\sqrt{\frac{[v^2]}{n-m}}$ 的证明●

[证]按式(8—12)，估计值为

$$\hat{X}=(A'A)^{-1}A'L$$

L 期望 $\quad E[L]=AX$

X 期望 $\quad E[\hat{X}]=(A'A)^{-1}A'E[L]=(A'A)^{-1}A'AX=X$

方差 $\quad D[L]=E(L-EL)(L-EL)'=\sigma^2 I_{n\times n}$

$\quad (I_{n\times n}$为 $n\times n$ 阶单位矩阵)

残差
$$\begin{aligned}V&=L-A\hat{X}\\ &=L-A\hat{X}-EL+EL\\ &=(L-EL)-A(\hat{X}-X)\end{aligned}$$

● 公式证明不用讲授，可供同学自学。

$$=(I-A(A'A)^{-1}A')(L-EL)$$

令 $$U=A(A'A)^{-1}A'$$

$$V'V=(L-EL)'(I-A(A'A)^{-1}A')'(I-A(A'A)^{-1}A')(L-EL)$$
$$=(L-EL)'(I-U)'(I-U)(L-EL)$$
$$=(L-EL)'(I-U)(L-EL)$$

分证：$(I-U)'(I-U)=(I-U)$：

$$U'=(A(A'A)^{-1}A')'=(A')'[(A'A)^{-1}]'(A)'$$
$$=A[(A'A)']^{-1}A'=A[(A)'(A')']^{-1}A'$$
$$=A(A'A)^{-1}A'=U$$

$$U'^2=U^2=U'U,U^2=A(A'A)^{-1}A'\cdot A(A'A)^{-1}A'=A(A'A)^{-1}A'=U$$

故 $$(I-U)'(I-U)=(I'-U')(I-U)$$
$$=I'I-U'I-I'U+U'U=I-U-U'+U'U=I-U$$

又 $$V'V=\mathrm{tr}(V'V)$$

(tr-trace：矩阵之迹，为主对角线上各元素之代数和，$(V'V)$可当作只有一个元素的特殊矩阵看待)。

$$V'V=\mathrm{tr}(V'V)=\mathrm{tr}(L-EL)'(I-U)(L-EL)$$
$$=\mathrm{tr}(L-EL)(L-EL)'(I-U)$$

分证：$\mathrm{tr}(L-EL)'(I-U)(L-EL)=\mathrm{tr}(L-EL)(L-EL)'(I-U)$：

设 $$ABC=(a_1a_2\cdots a_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$CAB=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(a_1\,a_2\cdots a_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

展开后之迹均为

$$(a_1^2b_{11}+a_2^2b_{21}+\cdots+a_n^2b_{n1})+(a_1^2b_{12}+a_2^2b_{22}+\cdots+a_n^2b_{n2})$$
$$+\cdots+(a_1^2b_{1n}+a_2^2b_{2n}+\cdots+a_n^2b_{nn})$$

得证

$$E(V'V)=\mathrm{tr}\,E(V'V)$$
$$=\mathrm{tr}\,E[(L-EL)(L-EL)'(I-U)]$$
$$=\sigma^2\mathrm{tr}\,(I-U)=\sigma^2(n-m)$$

故有 $$\sigma_s=\sqrt{\frac{[v^2]}{n-m}}$$

分证：$\mathrm{tr}(I-U)=n-m$：

$$U=A(A'A)^{-1}A'$$

对独立测量，A 之秩为 m，故 U 之秩$\leqslant m$。

又
$$UA=A(A'A)^{-1}A'A=A$$

则 U 之秩$\geqslant m$。因此，U 之秩为 m。

设有一正交矩阵 $F_{m\times m}$。可得：

$$F'UF=D=\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{pmatrix}$$

因
$$D^2=F'UFF'UF=F'U^2F=F'UF=D$$

而满足 $D^2=D$ 只有 d_i 都等于零或 1，因等于零无意义，所以 $d_i=1$。

D 为 U 之正交变换，且 U 之秩为 m，D 之秩亦为 m，故 d_i 的数目等于 m。又

$$F'(I-U)F=I-F'UF=I-D$$

$$I-D=\begin{pmatrix} 1-d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1-d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1-d_m \end{pmatrix}$$

元素"$1-d_i$"中，有 n 个 1，m 个 d_i，即主对角线上有 m 个元素是 $1-1=0$，有$(n-m)$个元素是 $1-0=1$。

$I-U$ 与 $I-D$ 之秩同为$(n-m)$。

故 $\mathrm{tr}\,(I-U)=n-m$。

第九章　实验结果的处理和经验公式

§9-1　回归分析与经验公式

在生产及科学研究工作中，人们常采用实验的方法，寻找出各变量之间的相互关系。表达变量之间的关系可以有多种办法，例如图形法、列表法等，这两种方法简单明了，有不少场合可以应用。但这些方法却不能深刻反映变量间的内在关系，用经验公式就可避免这一缺点，因为这种表达的形式比较紧凑，能充分表达变量之间的变化规律，且便于从理论上作进一步的研究，如微分、积分以及数值计算等，这些都为数据处理带来方便。回归分析法就是应用数理统计的方法，对实验数据进行分析和处理，从而得出反映变量间相互关系的经验公式，也即回归方程。通常，回归分析法包括以下3个步骤：

(1) 确定经验公式的形式，即函数类型；

(2) 求经验公式的系数，即回归参数；

(3) 研究经验公式的可信赖程度。

回归分析法有很广泛的用途，工农业生产和科研工作中的不少问题都可以用这种方法得到解决。例如，新产品的试制、零部件的质量分析、工艺因素的分析和控制、新标准的制定，气象预报，系统工程中的预测和规划等。回归分析法往往是一种有效的工具。

§9-2　一元线性经验公式

一元线性经验公式是指自变量 x 与因变量 y 存在线性变化的规律，其形式为

$$\hat{y} = b_0 + bx \tag{9—1}$$

式中：$\hat{y}$——因变量（y 的估计量）；

x——自变量；

b_0, b——需由测量数据确定的回归参数。

一、求经验公式的方法

1. 图解法

将 n 对 (x_i, y_i) 测量数据值标点在坐标纸上，若作图所得的点群形成一直线带，就在此直线带中间作一直线，使多数点位于直线上或接近于直线，且均匀分布在直线的两侧，这条直线便可近似地作为回归直线，而回归参数可直接从图中量取。

例9—1　用X光机检查镁合金铸件内部缺陷时，为了获得最佳的灵敏度，透视电压 y 应随被透视件的厚度 x 而改变，经实验获得下列一组数据，试用图解法求经验公式。

表 9—1　　例 9—1 数 据 表

x/mm	12	13	14	15	16	18	20	22	24	26
y/kV	52.0	55.0	58.0	61.0	65.0	70.0	75.0	80.0	85.0	91.0

解： 将上列数据点在坐标纸上，然后通过点群作出回归直线（图 9—1）。在接近直线的两端各取一点，并量得其坐标值为 $M_1(12,52.5)$ 和 $M_2(25,89.5)$，则回归参数

$$b=\frac{52.5-89.5}{12-25}\approx 2.8$$

将 M_1 点坐标代入回归方程，可求出

$$b_0=52.5-2.8\times 12=18.9$$

故所求的经验公式为

$$\hat{y}=18.9+2.8x$$

式中，$\hat{y}$ 代表因变量 y 的估计量。

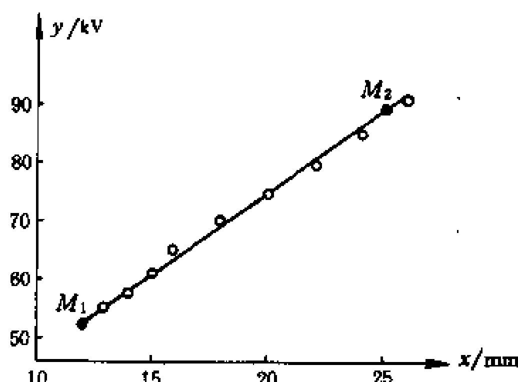


图 9—1

2. 平均值法

用平均值法求取经验公式的回归参数 b_0, b 时，是将 n 对测量数据 (x_i, y_i) 分别代入式（9—1），并将此测量方程划分成两组，即

$$\begin{cases} y_1 = b_0 + bx_1 \\ y_2 = b_0 + bx_2 \\ \vdots \\ y_k = b_0 + bx_k \end{cases} \qquad \begin{cases} y_{k+1} = b_0 + bx_{k+1} \\ y_{k+2} = b_0 + bx_{k+2} \\ \vdots \\ y_n = b_0 + bx_n \end{cases}$$

将两组测量方程各自相加，得两个方程式后，就可解出 b_0 及 b。取测量点数 n 为偶数，并且 $n=2k$ 时，得：

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{k} y_i-\sum_{i=k+1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{k} x_i-\sum_{i=k+1}^{n} x_i} \tag{9—2}$$

$$b_0=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}-b\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}=\bar{y}-b\bar{x} \tag{9—3}$$

例9—2 试将例9—1所列数据，用平均值法求经验公式。

解： 将测量数据代入式（9—1），并分成两组，即

$$52.0=b_0+12b \qquad 70.0=b_0+18b$$
$$55.0=b_0+13b \qquad 75.0=b_0+20b$$
$$58.0=b_0+14b \qquad 80.0=b_0+22b$$
$$61.0=b_0+15b \qquad 85.0=b_0+24b$$

求和 $$\frac{65.0=b_0+16b}{291.0=5b_0+70b} \qquad \frac{91.0=b_0+26b}{401.0=5b_0+110b}$$

按式(9—2)及式(9—3)可算出

$$b=\frac{291.0-401.0}{70-110}=2.75$$

$$b_0=\frac{291.0+401.0}{10}-2.75\times\frac{70+110}{10}=19.7$$

故所求经验公式为

$$\hat{y}=19.7+2.75x$$

在平均值法中，由于将 n 个测量方程分成两组的方法可有很多种，不同的分组法所得的结果也会略有差异，故平均值法只是一种近似的方法。

3. 最小二乘法

应用最小二乘法原理求取回归参数 b_0, b 时，应使各实验点与回归直线的偏离平方和为最小，设有 n 对测量数据(x_i, y_i)，在 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 点上 y 的估计量为

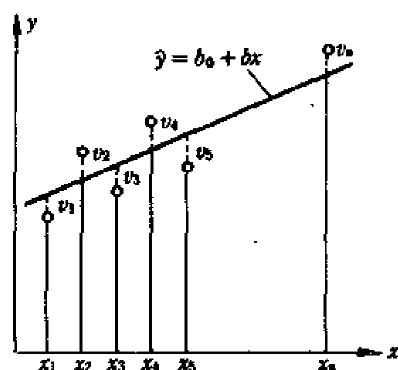


图 9—2

$$\begin{cases}\hat{y}_1=b_0+bx_1\\ \hat{y}_2=b_0+bx_2\\ \vdots\\ \hat{y}_n=b_0+bx_n\end{cases} \tag{9—4}$$

误差方程组为(图 9—2)：

$$\begin{cases}v_1=y_1-\hat{y}=y_1-(b_0+bx_1)\\ v_2=y_2-\hat{y}_2=y_2-(b_0+bx_2)\\ \vdots\\ v_n=y_n-\hat{y}_n=y_n-(b_0+bx_n)\end{cases} \tag{9—5}$$

应使 $E=\sum_{i=1}^{n}v_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_0-bx_i)^2=$ 最小，于是求取的参数 b_0, b 应满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial E}{\partial b_0}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_0-bx_i)=0\\ \dfrac{\partial E}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-b_0-bx_i)x_i=0\end{cases} \tag{9—6}$$

式(9—6)称正规方程组，用代数法求解，可得：

$$b=\frac{l_{xy}}{l_{xx}} \tag{9—7}$$

$$b_0=\bar{v}-b\bar{x}=\frac{1}{n}\sum y-b\frac{1}{n}\sum x \tag{9—8}$$

式中 $$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum x, \bar{y}=\frac{1}{n}\sum y$$

$$l_{xx}=\sum(x-\bar{x})^2=\sum x^2-\frac{1}{n}(\sum x)^2 \tag{9—9}$$

$$l_{xy} = \sum(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = \sum xy - \frac{1}{n}(\sum x)(\sum y) \tag{9—10}$$

各测量值(x,y)对其算术平均值之差$(x-\bar{x})$,$(y-\bar{y})$称为测量值的离差,而 l_{xx},l_{xy}则称为离差积之和,显然 l_{xx}的脚标xx 表示了x 离差的自乘积,l_{xy}的脚标xy 表示x,y 的离差积。

在式(9—8)至式(9—10)及在以后的计算中,为简化算式,用 $\sum$ 表示对 i 从 1 到 n 求和,并省去了变量 x_i,y_i 的脚标i。

得到了 b_0,b 以后,经验公式就可确定。将式(9—8)代入式(9—1),得出经验公式的另一种形式

$$\hat{y}-\bar{y}=b(x-\bar{x}) \tag{9—11}$$

即回归直线通过点$(\bar{x},\bar{y})$,明确这一点对前述的图解法将有帮助。

为了以后相关系数计算的方便,数据处理时顺便可以算出 l_{yy}:

$$l_{yy} = \sum(y-\bar{y})^2 = \sum y^2 - \frac{1}{n}(\sum y)^2 \tag{9—12}$$

用矩阵法求取回归参数时,其计算式比较简洁,由式(9—5)可写出误差方程组的矩阵形式:

$$V=Y-XB \tag{9—13}$$

式中,V 为残差矩阵;Y 为测量值矩阵;X 为结构矩阵;B 为待求的回归参数矩阵。并有

$$V = \underset{(n\times1)}{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \qquad Y = \underset{(n\times1)}{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$X = \underset{(n\times2)}{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \qquad B = \underset{(2\times1)}{B} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b \end{pmatrix}$$

在残差平方和为最小时,求得的正规方程组为

$$X'V=0 \tag{9—14}$$

或
$$X'Y-X'XB=0$$
即
$$X'XB=X'Y$$

得
$$B=\begin{pmatrix} b_0 \\ b \end{pmatrix}=(X'X)^{-1}X'Y \tag{9—15}$$

例9—3 试将例9—1所列数,按最小二乘法求其回归参数。

解: (1) 用代数法计算

先将测量数据列表进行处理

由式(9—7)与式(9—8),得:

$$b=\frac{l_{xy}}{l_{xx}}=\frac{576}{210}\approx 2.74$$

$$b_0=\bar{y}-b\bar{x}=69.2-2.743\times 18=19.83\approx 19.8$$

表 9—2　　例 9—3 数据计算

x_i	y_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$y_i-\bar{y}$	$(y_i-\bar{y})^2$	$(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$
12	52.0	−6	36	−17.2	295.84	103.2
13	55.0	−5	25	−14.2	201.64	71.0
14	58.0	−4	16	−11.2	125.44	44.8
15	61.0	−3	9	−8.2	67.24	24.6
16	65.0	−2	4	−4.2	17.64	8.4
18	70.0	0	0	0.8	0.64	0
20	75.0	2	4	5.8	33.64	11.6
22	80.0	4	16	10.8	116.64	43.2
24	85.0	6	36	15.8	249.64	94.8
26	91.0	8	64	21.8	475.24	174.4
$\sum x=180$ $\bar{x}=18$	$\sum y=692$ $\bar{y}=69.2$		$l_{xx}=210$		$l_{yy}=1\,583.6$	$l_{xy}=576.0$

故得经验公式

$$\hat{y}=19.8+2.74x$$

(2) 用矩阵法计算

已知：$\underset{(2\times 10)}{X'}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 18 & 20 & 22 & 24 & 26\end{pmatrix}$

$$\underset{(10\times 2)}{X}=\begin{bmatrix}1 & 12\\ 1 & 13\\ 1 & 14\\ 1 & 15\\ 1 & 16\\ 1 & 18\\ 1 & 20\\ 1 & 22\\ 1 & 24\\ 1 & 26\end{bmatrix}$$

$$\underset{(2\times 2)}{X'X}=\begin{pmatrix}n & \sum x\\ \sum x & \sum x^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 180\\ 180 & 3450\end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix}10 & 180\\ 180 & 10\end{vmatrix}}\begin{pmatrix}3\,450 & -180\\ -180 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.642\,86 & -0.085\,714\,3\\ -0.085\,714\,3 & 0.004\,761\,86\end{pmatrix}$$

$$Y=\begin{bmatrix}52.0\\55.0\\58.0\\61.0\\65.0\\70.0\\75.0\\80.0\\85.0\\91.0\end{bmatrix}$$

$$X'Y=\begin{bmatrix}\sum y\\ \sum xy\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}6\ 92\\13\ 032\end{pmatrix}$$

故 $B=\begin{bmatrix}b_0\\b\end{bmatrix}=(X'X)^{-1}X'Y=\begin{pmatrix}1.642\ 86 & -0.085\ 714\ 3\\-0.085\ 714\ 3 & 0.004\ 761\ 86\end{pmatrix}\begin{pmatrix}692\\13\ 032\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19.8\\2.74\end{pmatrix}$

得 $\hat{y}=19.8+2.74x$

两种方法的计算结果完全相同。

二、相关系数及其显著性检验

1. 相关系数的作用

以上介绍的三种拟合回归直线的方法，其方法本身，并不要求各实验点必须具有线性的关系，也就是说，即使一组测量值(x_i,y_i)在坐标图上是一群杂乱无章的散点，也可按线性经验公式(9—1)求出其参数 b_0 和 b。显然，以线性经验公式来表示一组杂乱的散点，并无多少实际意义。究竟在什么情况下，拟合回归直线才有意义呢？从上述的例子可见：至少是两个变量 x,y 之间具有线性变化的趋势。所以应有一数量指标来描述两个变量之间线性关系密切的程度，这个指标就是前面第六章提到的相关系数，通常用字母 ρ 或$\rho_{x,y}$表示，它是由下面的公式来计算的，即

$$\rho=\frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}l_{yy}}}=\frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2\sum(y-\bar{y})^2}} \qquad (9—16)$$

上式中，因分母的根式恒取正值，故相关系数的符号取决于离差(测量值与平均值之差)积之和 l_{xy}的符号(式 9—10)，即与回归参数 b 的符号是一致的。

相关系数 ρ 是描述两变量 x,y 线性关系密切程度的数量指标，自然其绝对值愈大，即$|\rho|$接近于 1 时，x,y 的线性关系最密切；当 ρ 接近于零时，两者的线性变化规律就不明显。前面图 6—10 表示的为不同相关系数时实验点的分布示意图。至于图 6—11 的情况，已不属直线型回归的讨论范畴。

2. 相关系数的显著性检验

在了解了相关系数的意义后，对以上提出的问题，即在一组实验点拟合回归直线是否具有意义，就不难回答；只有当相关系数的绝对值大到一定程度时，才可以用回归直线来近似地表

示 x 与 y 的关系。在这种情形下，我们说相关系数显著，即 x 与 y 关系密切。通常也只有在此情况下，才能判定 x 与 y 存在线性关系。表 9—3[8]给出了在不同自由度数 $n-2$(n 为实验点数)、两种显著性水平 α(0.05 及 0.01)相关系数达到显著的最小值。

表 9—3　　　　显著性检验时相关系数的最小值

$n-2$ \ α	0.05	0.01	$n-2$ \ α	0.05	0.01
1	0.997	1.000	10	0.576	0.708
2	0.950	0.990	11	0.553	0.684
3	0.878	0.959	12	0.532	0.661
4	0.811	0.917	13	0.514	0.641
5	0.754	0.874	14	0.497	0.623
6	0.707	0.834	15	0.482	0.606
7	0.666	0.798	16	0.468	0.590
8	0.632	0.765	17	0.456	0.575
9	0.602	0.735	18	0.444	0.561

例如 $n=12$，若 $|\rho|\geqslant 0.576$，我们说 ρ 在 $\alpha=0.05$ 水平上显著；若 $\rho|\geqslant 0.708$，则说它在 $\alpha=0.01$ 水平上显著。α 愈小，显著性程度愈高。若 $|\rho|<0.576$，则 ρ 不显著，x 与 y 的线性关系就不明显，在这种情况下，配置回归直线就没有什么意义了。

例9—4　计算例9—1中的相关系数，判断其在 $\alpha=0.01$ 水平上是否显著。

解：利用例 9—1 计算的中间结果，则

$$\rho=\frac{l_{xy}}{\sqrt{l_{xx}l_{yy}}}=\frac{576}{\sqrt{210\times 1\ 583.6}}=0.999$$

自由度

$n-2=8$

$0.999>0.765$

故其相关系数在 $\alpha=0.01$ 水平上是显著的，即 x,y 线性关系密切，配置回归直线是有意义的。

三、经验公式的回归精度

以上求得的直线性经验公式，已在一定的程度上揭示了两个相关变量 x,y 之间的内在规律，但它的效果如何？经验公式的精度又是如何？为此还需做进一步的分析。

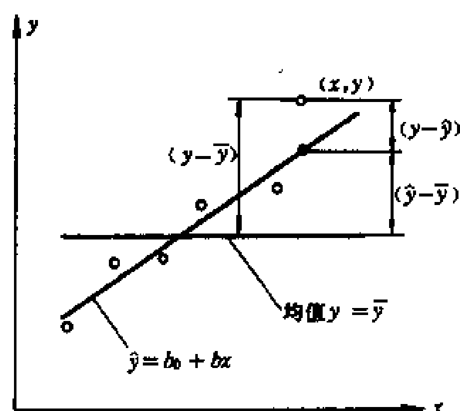


图　9—3

首先来研究因变量 y 的变化规律。通常，在 n 对测量数据中，y 值总是变动的，y 值的这种变动称为变差，它的大小可以通过各次的测量值与其均值的离差($y-\bar{y}$)表示，而全部 n 次测量值的总变差，可由这些离差的平方和 S 来表示，参阅式(9—12)，即

$$S=l_{yy}=\sum(y-\bar{y})^2$$

将上式进行分解(参看图 9—3)，即

$$y-\bar{y}=(y-\hat{y})+(\hat{y}-\bar{y})$$

等式两边平方后求和得：

$$\sum(y-\bar{y})^2=\sum[(y-\hat{y})+(\hat{y}-\bar{y})]^2=\sum(y-\hat{y})^2+\sum(\hat{y}-\bar{y})^2+2\sum(y-\hat{y})(\hat{y}-\bar{y})$$

容易证明 $\sum(y-\hat{y})(\hat{y}-\bar{y})=0$[9]，于是有

$$\sum(y-\bar{y})^2=\sum(y-\hat{y})^2+\sum(\hat{y}-\bar{y})^2$$

或写成

$$S=Q+U \tag{9—17}$$

式中 $Q=\sum(y-\hat{y})^2$；$U=\sum(\hat{y}-\bar{y})^2$。

式(9—17)等号右边第一项 $\sum(y-\hat{y})^2$ 正是各次测量值与回归直线的偏离距离之平方和，称作残差平方和。它的大小反映了 x 对 y 的线性规律之外的一切因素（主要是测量误差，x 对 y 的非线性影响等）对 y 影响的总和。

等号右面第二项是回归值 $\hat{y}$ 与均值 $\bar{y}$ 之差的平方和，因此它的大小完全由回归直线的斜率所决定，它反映了 y 的离差平方和 S 中由于 x 与 y 的线性变化规律而引起的 y 变化部分，称作回归平方和。

从回归平方和 U 与残差平方和 Q 的意义可知，经验公式效果的好坏，取决于 U 与 Q 的大小，或者说取决于 U 对离差平方和 S 的比值 U/S，此比值愈大，自然 Q/S 就小，经验公式的精确程度就愈高。因

$$U=\sum(\hat{y}-\bar{y})^2=\sum(b_0+bx-b_0-b\bar{x})^2=b^2\sum(x-\bar{x})^2$$

$$=b\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})=bl_{xy} \tag{9—18}$$

由式(9—7)及式(9—16)，可得：

$$\frac{U}{S}=\frac{bl_{xy}}{l_{yy}}=\frac{l_{xy}^2}{l_{xx}l_{yy}}=\rho^2 \tag{9—19}$$

故

$$U=\rho^2S=\rho^2l_{yy} \tag{9—20}$$

$$Q=S-U=(1-\rho^2)l_{yy}$$

以上三式表示了 3 个平方和 S,U 及 Q 与相关系数 ρ 的关系，从而也补充说明了相关系数 ρ 的意义，即 ρ 愈大，经验公式的精确程度愈高。此外，由于 $U\leqslant S$，由式(9—19)得 $|\rho|\leqslant 1$。

由于残差平方和 Q 是反映了 x 对 y 线性影响之外的其他随机影响的总和，故定义下列估计量 s

$$s=\sqrt{\frac{Q}{n-2}} \tag{9—21}$$

s 称剩余标准差，它的意义与前述的标准差 σ 相似，用它可以衡量所有随机因素对 y 影响的大小，s 愈小，回归精度愈高。

例9—5 试比较例9—1，例9—2，例9—3求得的 3 个经验公式的回归精度。

解：三例所得的经验公式为

图解法 $\hat{y}=18.9+2.80x$

平均值法 $\hat{y}=19.7+2.75x$

最小二乘法 $\hat{y}=19.8+2.74x$

表 9—4 列出了实验中的测量数据 (x_i,y_i)，由上列 3 个经验公式计算的 $\hat{y}_i,v_i$ 及 $\sum v_i^2$。

表 9—4　　　　例 9—5　数据表

x_i	y_i	图解法			平均值法			最小二乘法		
		$\hat{y}_i$	v_i	v_i^2	$\hat{y}_i$	v_i	v_i^2	$\hat{y}$	v_i	v_i^2
12	52.0	52.50	−0.50	0.25	52.70	−0.70	0.490 0	52.68	−0.68	0.462 4
13	55.0	55.30	−0.30	0.09	55.45	−0.45	0.202 5	55.42	−0.42	0.176 4
14	58.0	58.10	−0.10	0.01	58.20	−0.20	0.040 0	58.16	−0.16	0.025 6
15	61.0	60.90	0.10	0.01	60.95	0.05	0.002 5	60.90	0.1	0.010 0
16	65.0	63.70	1.3	1.69	63.70	1.3	1.690 0	63.64	1.36	1.849 6
18	70.0	69.30	0.70	0.49	69.20	0.80	0.640 0	69.12	0.88	0.774 4
20	75.0	74.90	0.10	0.01	74.70	0.30	0.090 0	74.60	0.40	0.160 0
22	80.0	80.50	−0.50	0.25	80.20	−0.20	0.040 0	80.08	−0.08	0.006 4
24	85.0	86.10	−1.10	1.21	85.70	−0.70	0.490 0	85.56	−0.56	0.313 6
26	91.0	91.70	−0.70	0.49	91.20	−0.20	0.040 0	91.04	−0.04	0.001 6
求和$\sum v_i^2$				4.50			3.725 0			3.780 0

三种方法的剩余标准差可计算为

图解法　　$s=\sqrt{\dfrac{4.50}{10-2}}=0.75\approx0.8$

平均值法　　$s=\sqrt{\dfrac{3.725}{10-2}}=0.68\approx0.7$

最小二乘法　　$s=\sqrt{\dfrac{3.78}{10-2}}=0.69\approx0.7$

由回归分析的原理与上例的计算比较，可以认为最小二乘法是回归分析中回归精度较高的一种方法，但其计算略嫌繁琐；图解法虽然简单，但是精度不高；若测量数据较多，且较精确时，平均值法也不失为一种精度较高的回归分析法。

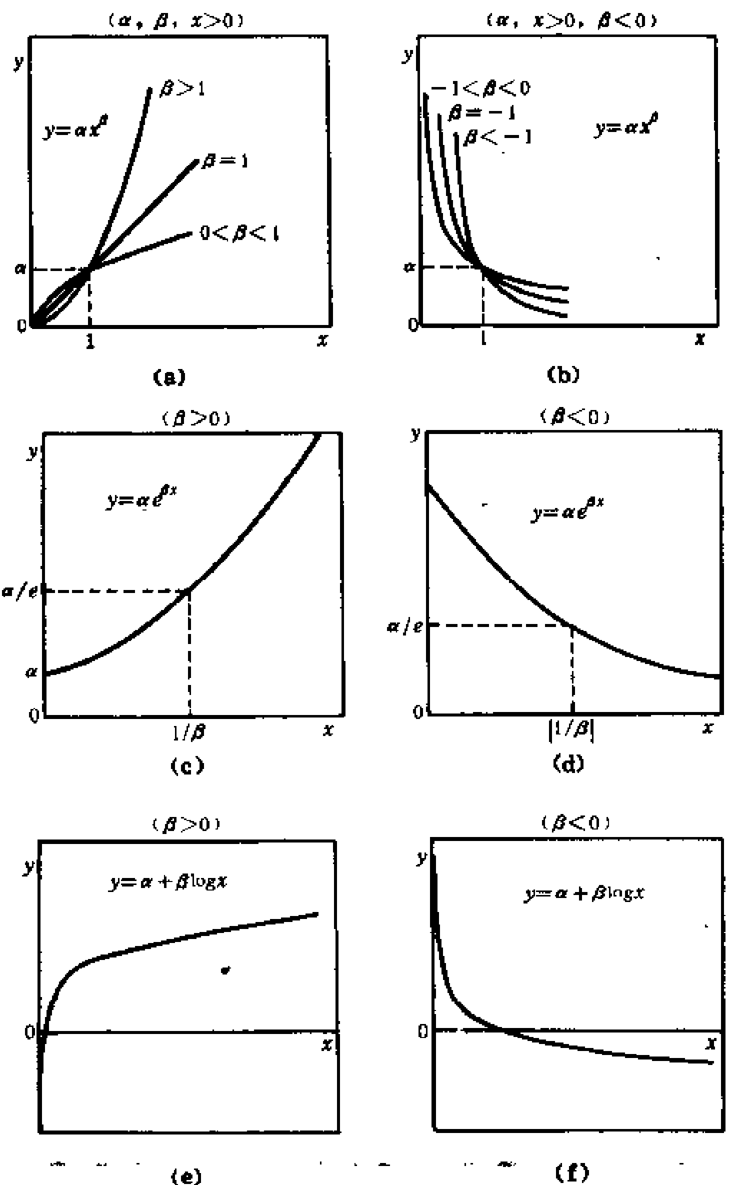
这里顺便指出，在以上各例计算中，由于测量数据 y_i 的有效数字是 3 位(准确至小数第一位)，在回归分析中，通常都假设自变量 x_i 无误差，故其有效数字可认为多于两位；因而计算所得的回归参数 b_0, b 宜截取为 3 位，而剩余标准差 s 的有效位数则截取为一位(即小数第一位)。

§9—3　一元非线性经验公式

对两变量间具有非线性关系的测量数据进行回归分析时，一般先要选择经验公式的类型，如双曲线、抛物线等。必要时。还要对此进行验证；其次是要确定经验公式的系数；最后还要估计回归的精度。

一、经验公式类型的选择

在工程实验中，经验公式类型的选择，多数可由专业知识、实践经验与参考其他资料来解决。另一种办法是将测量数据的散点，先在坐标纸上绘制出大致的曲线，然后与图 9—4 上所列的各类典型曲线相比较，初步选定经验公式的形式。


(α, β, x>0)
y=αx^β
β>1
β=1
0<β<1
(a)
(α, x>0, β<0)
−1<β<0
β=−1
β<−1
y=αx^β
(b)
(β>0)
y=αe^{βx}
α/e
1/β
(c)
(β<0)
y=αe^{βx}
α/e
|1/β|
(d)
(β>0)
y=α+βlogx
(e)
(β<0)
y=α+βlogx
(f)

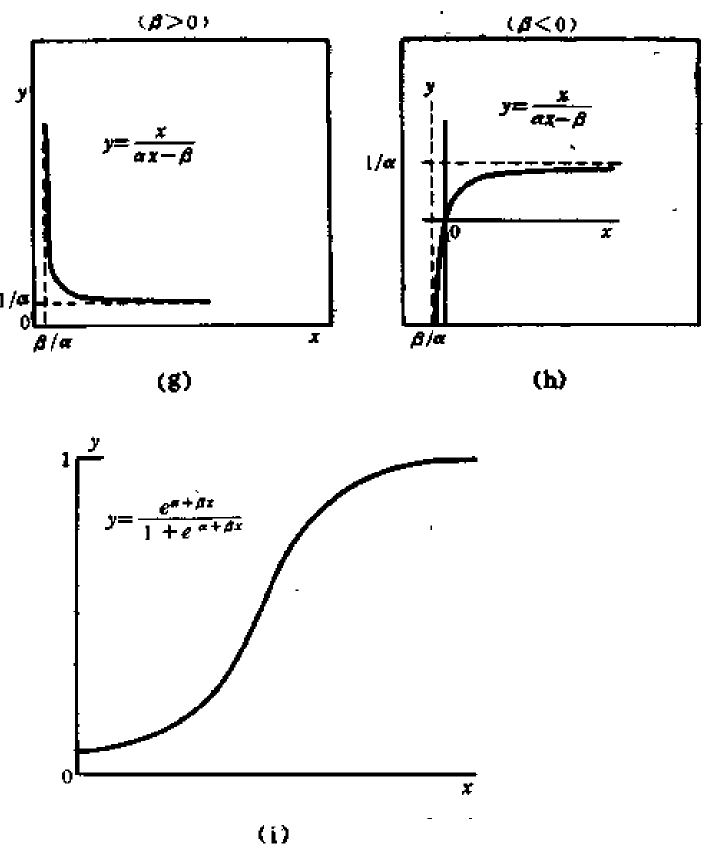

(β>0)
y=x/(αx−β)
1/α
β/α
(g)
(β<0)
y=x/(αx−β)
1/α
β/α
(h)
y=e^{α+βx}/(1+e^{α+βx})
(i)

图 9－4

至于初步选定的经验公式的形式,是否能较好地反映测量数据变化的规律,还可用以下的方法来检验。

1. 直线检验法

检验时,先将初步选定的经验公式变换为直线式,即

$$Y = A + BX$$

式中,Y,X 为只含一个变量 y 或 x 的函数;A 和 B 是与变换前经验公式参数 a,b 有关的常数和系数。

算出若干对与测量数据 x_i 与 y_i 相应的 Y_i 与 X_i 值(x_i,y_i 取值的间隔以大一些为宜),而后以 Y 和 X 为坐标做图,若所获得的图形为一直线,则表明预选的经验公式是正确的。

图 9—4 所示的几种函数图形,都可以通过变量变换,用直线检验法来检验。

例 9—6 试用直线检验法检验表9—5中数据是否可用经验公式 $y=\frac{x}{a+bx}$ 表示。

表 9—5　　例 9—6 数 据 表

x	1	1.5	2	3	4	6	8	10
y	3.32	4.28	5.02	5.94	6.67	7.50	8.00	8.32

解: 进行变量变换,设

$$Y=\frac{1}{y},X=\frac{1}{x}$$

则原式可写成

$$Y = A + BX$$

式中,$A=b$; $B=a$。

将测量数量按表 9—6 所列变量形式顺序进行处理,并将处理结果以 Y 和 X 为坐标作图,各实验点较好地处于一条直线上(图 9—5),故本例数据可用 $y=\frac{x}{a+bx}$ 表示。

表 9—6　　例 9—6 中 1/x 与 1/y 值

$\frac{1}{x}$	1	0.67	0.5	0.33	0.25	0.17	0.13	0.1
$\frac{1}{y}$	0.30	0.23	0.20	0.17	0.15	0.13	0.13	0.12

2. 表差法

若所选定的经验公式是一多项式,则可应用表差法来确定多项式的次数,这是因为当差分表上的差分等于常数时,该差分的级次就是多项式的次数。

差分的定义为:设函数 $y=f(x)$在一连串点 $x_0+ih(i=0,1\cdots,m)$的值 $y_0=f(x_0)$,$y_1=f(x_0+h)$,$\cdots$,$y_m=f(x_0+mh)$是已知的,则我们定义

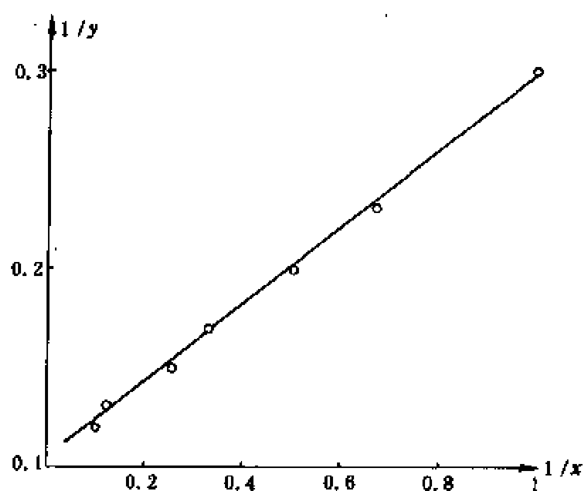


图 9—5

$$y_1 - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta_0$$
$$y_2 - y_1 = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h) = \Delta_1$$
$$y_3 - y_2 = f(x_0 + 3h) - f(x_0 + 2h) = \Delta_2$$
$$\vdots$$

为一阶差分,而一阶差分的一阶差分

$$\Delta_1 - \Delta_0 = \Delta_0^2$$
$$\Delta_2 - \Delta_1 = \Delta_1^2$$
$$\Delta_3 - \Delta_2 = \Delta_2^2$$
$$\vdots$$

为二阶差分,二阶差分的一阶差分

$$\Delta_1^2 - \Delta_0^2 = \Delta_0^3$$
$$\Delta_2^2 - \Delta_1^2 = \Delta_1^3$$
$$\Delta_3^2 - \Delta_2^2 = \Delta_2^3$$
$$\vdots$$

为三阶差分,而 $n-1$ 阶差分的一阶差分

$$\Delta_1^{n-1} - \Delta_0^{n-1} = \Delta_0^n$$
$$\Delta_2^{n-1} - \Delta_1^{n-1} = \Delta_1^n$$
$$\Delta_3^{n-1} - \Delta_2^{n-1} = \Delta_2^n$$
$$\vdots$$

为 n 阶差分,将各阶差分列成表格,称为差分表,如表 9—7 所示。

例如,多项式 $y = 1 + x^2$,将自变量 x 的差值 h 取作 1,可列出如表 9—8 所示的差分表。因原函数为二次多项式,故其二阶差分为常数,三阶差分为零。

因此，在多项式回归中，用上述求逐阶差分的方法，可以检验或确定多项式的次数。表9—11列出了常见方程式类型及用表差法确定这些方程式次数时的步骤和判别标准。

表9—7　差分表

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	⋮
x_0	y_0	Δ_0	Δ_0^2	Δ_0^3	Δ_0^4	⋮
x_0+h	y_1	Δ_1	Δ_1^2	Δ_1^3	Δ_1^4	⋮
x_0+2h	y_2	Δ_2	Δ_2^2	Δ_2^3	Δ_2^4	⋮
x_0+3h	y_3	Δ_3	Δ_3^2	Δ_3^3	⋮	
x_0+4h	y_4	Δ_4	Δ_4^2	⋮		
x_0+5h	y_5	Δ_5	⋮			
x_0+6h	y_6	⋮				
⋮	⋮					

表9—8　差分表示例

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3
0	1	2-1=1	3-1=2	2-2=0
1	2	5-2=3	5-3=2	2-2=0
2	5	10-5=5	7-5=2	
3	10	17-10=7		
4	17			

例9—7　试用表差法检验表9—9中的测量数据是否可用三次多项式 $y=a+bx+cx^2+dx^3$ 表示？

表9—9　例9—7数据表

x	1	2	3	4	5	6
y	0.03	0.11	0.31	0.69	1.31	2.23

解： 测量数据中，x 的间隔已为常数，现列出其差分表如表9—10。

表9—10　例9—7差分表

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1	0.03	0.08	0.12	0.06	0
2	0.11	0.20	0.18	0.06	0
3	0.31	0.38	0.24	0.06	
4	0.69	0.62	0.30		
5	1.31	0.92			
6	2.23				

因差分表中的三阶差分为常数，四阶差分为零，故上述测量数据可用三次多项式表示。

表 9—11　　　　常见方程类型及处理

序号	方程式类型	根据 $\Delta x,\Delta(\frac{1}{x})$ 或 $\Delta\log x$ 为常数		确定方程式的标准
		画图、作表	求顺序差值	
1	$y=a+bx+cx^2+\cdots+qx^n$	$y=f(x)$	$\Delta y,\Delta^2 y,\Delta^3 y,\cdots,\Delta^n y$	$\Delta^n y$ 为常数
2	$y=a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\cdots+\frac{q}{x^n}$	$y=f(\frac{1}{x})$	$\Delta y,\Delta^2 y,\Delta^3 y,\cdots,\Delta^n y$	$\Delta^n y$ 为常数
3	$y^2=a+bx+cx^2+\cdots+qx^n$	$y^2=f(x)$	$\Delta y^2,\Delta^2 y^2,\Delta^3 y^2,\cdots,\Delta^n y^2$	$\Delta^n y^2$ 为常数
4	$\log y=a+bx+cx^2+\cdots+qx^n$	$\log y=f(x)$	$\Delta(\log y),\Delta^2(\log y),\cdots,\Delta^n(\log y)$	$\Delta^n(\log y)$ 为常数
5	$y=a+b(\log y)+c(\log y)^2$	$y=f(\log y)$	$\Delta y,\Delta^2 y$	$\Delta^2 y$ 为常数
6	$y=ab^x=ae^{b'x}$	$\log y=f(x)$	$\Delta(\log y)$	$\Delta(\log y)$ 为常数
7	$y=a+bc^x=a+be^{c'x}$	$\log y^*=f(x)$	$\Delta y,\log\Delta y,\Delta(\log\Delta y)$	$\Delta(\log\Delta y)$ 为常数
8	$y=a+bx+cd^x=a+bx+ce^{d'x}$	$y=f(x)$	$\Delta y,\Delta^2 y,\log\Delta^2 y,\Delta(\log\Delta^2 y)$	$\Delta(\log\Delta^2 y)$ 为常数
9	$y=ax^b$	$\log y=f(\log x)$	$\Delta(\log y)$	$\Delta(\log y)$ 为常数
10	$y=a+bx^c$	$\log y^*=f(\log x)$	$\Delta y,\log\Delta y,\Delta(\log\Delta y)$	$\Delta(\log\Delta y)$ 为常数
11	$y=axe^{bx}$	$\ln y=f(x)$	$\Delta\ln y,\Delta\ln x$	$(\Delta\ln y-\Delta\ln x)$ 为常数

注：$y^*=(y-a)$

二、用化曲线回归为直线回归的方法求经验公式

在不少工程问题中，遇到的两变量之间的变化规律是曲线的关系，为了简便地求出曲线方程中的参数，应尽量借数学变换，将曲线回归变换成直线回归来计算。如对于指数形式的经验公式

$$\hat{y}=ax^b$$

等号两边取对数

$$\log\hat{y}=\log a+(\log x)b$$

引入新的变量 $y'=\log\hat{y}$，$x'=\log x$ 及 $a_0=\log a$，则上式就变换成直线方程式，即

$$y'=a_0+x'b$$

其中，y'，x' 由测量数据可以得出，因此，可按前述求一元线性经验公式的方法求出参数 a_0，b，也即求出了指数形式的经验公式中的参数 a，b。表 9—12 列出了一些非线性方程经变量置换后的线性化形式。

例 9—8　以下测量数据(表 9—13)，若用指数形式的经验公式 $y=ax^b$ 拟合，试计算公式的参数 a 与 b。

解：指数形式的经验公式 $y=ax^b$ 可变换成以下直线式：

$$\log y=\log a+(\log x)b$$

或写作

$$y'=a_0+x'b$$

数据处理时，首先要将上列 9 对测量数 (x_i,y_i) 取对数，得 9 对 (x'_i,y'_i) 值，代入上式

表 9—12　　　　非线性方程的线性化

序号	非线性方程	线性化方程	线性化变量	
			y'	x'
1	$y=1-e^{-a_0x}$	$\ln\frac{1}{1-y}=a_0x$	$\ln\frac{1}{1-y}$	x
2	$y=a_0+a_1\sqrt{x}$	$y=a_0+a_1\sqrt{x}$	y	$\sqrt{x}$
3	$y=1-\exp[-\left(\frac{x-x_0}{\theta-x_0}\right)^b]$	$\ln\ln\frac{1}{1-y}=-b\ln(\theta-x_0)+b\ln(x-x_0)$	$\ln\ln\frac{1}{1-y}$	$\ln(x-x_0)$
4	$y=ax^b$	$\ln y=\ln a+b\ln x$	$\ln y$	$\ln x$
5	$y=a+\frac{b}{x}$	$y=a+b\frac{1}{x}$	y	$\frac{1}{x}$
6	$y=e^{(a+bx)}$	$\ln y=a+bx$	$\ln y$	x
7	$e^y=a_0x^{a_1}$	$y=\ln a_0+a_1\ln_x$	y	$\ln x$

表 9—13　　　　例 9—8 数据表

x	2	4	8	16	25	32	50	64	100
y	24.50	37.00	56.80	85.50	112.50	129.50	171.50	200.00	260.50

后，可建立下列测量方程组，即

$$\begin{cases}1.389\,2=a_0+0.301\,0b\\1.568\,2=a_0+0.602\,1b\\1.754\,3=a_0+0.903\,1b\\1.932\,0=a_0+1.204\,1b\\2.051\,2=a_0+1.397\,9b\\2.112\,3=a_0+1.505\,2b\\2.234\,3=a_0+1.699\,0b\\2.301\,0=a_0+1.806\,2b\\2.415\,8=a_0+2.000\,0b\end{cases}$$

若按最小二乘法计算，由式(9—15)得：

$$B=\begin{bmatrix}a_0\\b\end{bmatrix}=(X'X)^{-1}X'Y$$

以下给出矩阵计算中的几个中间计算结果。

$$X'X=\begin{bmatrix}n & \sum x'\\ \sum x' & \sum x'^2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 11.418\,6\\11.418\,6 & 17.087\,3\end{pmatrix}$$

$$(X'X)^{-1}=\begin{pmatrix}0.730\ 19 & -0.487\ 95\\ -0.487\ 95 & 0.384\ 59\end{pmatrix}$$

$$X'Y=\begin{bmatrix}\sum y'\\ \sum x'y'\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}17.758\ 3\\ 24.103\ 5\end{pmatrix}$$

故
$$B=\begin{bmatrix}a_0\\ b\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0.730\ 19 & -0.487\ 95\\ -0.487\ 95 & 0.384\ 59\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17.758\ 3\\ 24.103\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.205\ 63\\ 0.604\ 80\end{pmatrix}$$

经验公式的参数为

$$a_0=\log^{-1}1.205\ 63\approx 16.056$$
$$b\ =0.604\ 80$$

故得经验公式为

$$\hat{y}=16.056\ x^{0.604\ 80}$$

三、用插入法求经验公式

若经验公式的形式为多项式,则还可用插入法求其回归系数,该方法的原理如下:

设函数 $y=f(x)$ 在 x 轴上取不等距的 $x_0,x_1,x_2,\cdots$ 点,各点对应的函数值为 $y_0,y_1,y_2,\cdots$,则按各阶差商 $\delta',\delta'',\delta''',\cdots$ 的定义,有

$$\frac{y_0-y}{x_0-x}=\delta',\frac{\delta_0-\delta'}{x_1-x}=\delta'',\frac{\delta_0^2-\delta''}{x_2-x}=\delta''',\cdots$$

由上述等式可得:

$$\begin{aligned}y&=y_0+(x-x_0)\delta'\\ &=y_0+(x-x_0)[\delta_0+(x-x_1)\delta'']\\ &=y_0+(x-x_0)\delta_0+(x-x_0)(x-x_1)[\delta_0^2+(x-x_2)\delta''']\\ &=y_0+(x-x_0)\delta_0+(x-x_0)(x-x_1)\delta_0^2\\ &\quad+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)[\delta_0^3+(x-x_3)\delta'''']\end{aligned}$$

即
$$y=y_0+(x-x_0)\delta_0+(x-x_0)(x-x_1)\delta_0^2+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\delta_0^3+\cdots \qquad (9\text{—}22)$$

这就是著名的不等间隔张遂-牛顿插入公式。在多项式回归分析中,为简化计算,在 x 轴上取点常是等间隔的,若 x_0 为起始测量点,间隔为 h,则有

$$x_1=x_0+h,x_2=x_0+2h,x_3=x_0+3h,\cdots$$

由差商定义,可得一阶差商

$$\begin{cases}\delta_0=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y_1-y_0}{h}=\dfrac{\Delta_0}{h}\\ \delta_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{h}=\dfrac{\Delta_1}{h}\\ \delta_2=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\dfrac{y_3-y_2}{h}=\dfrac{\Delta_2}{h}\\ \quad\vdots\end{cases}$$

二阶差商

$$\begin{cases}\delta_0^2=\dfrac{\delta_1-\delta_0}{x_2-x_0}=\dfrac{1}{2h}\left(\dfrac{\Delta_1}{h}-\dfrac{\Delta_0}{h}\right)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta_0^2}{h^2}\\ \delta_1^2=\dfrac{\delta_2-\delta_1}{x_3-x_1}=\dfrac{1}{2h}\left(\dfrac{\Delta_2}{h}-\dfrac{\Delta_1}{h}\right)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta_1^2}{h^2}\\ \delta_2^2=\dfrac{\delta_3-\delta_2}{x_4-x_2}=\dfrac{1}{2h}\left(\dfrac{\Delta_3}{h}-\dfrac{\Delta_2}{h}\right)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta_2^2}{h^2}\\ \vdots\end{cases}$$

三阶差商

$$\begin{cases}\delta_0^3=\dfrac{\delta_1^2-\delta_0^2}{x_3-x_0}=\dfrac{1}{3h}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta_1^2}{h^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta_0^2}{h^2}\right)=\dfrac{1}{2\times3}\dfrac{\Delta_0^3}{h^3}\\ \delta_1^3=\dfrac{\delta_2^2-\delta_1^2}{x_4-x_1}=\dfrac{1}{3h}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta_2^2}{h^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta_1^2}{h^2}\right)=\dfrac{1}{2\times3}\dfrac{\Delta_1^3}{h^3}\\ \delta_2^3=\dfrac{\delta_3^2-\delta_2^2}{x_5-x_2}=\dfrac{1}{3h}\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta_3^2}{h^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta_2^2}{h^2}\right)=\dfrac{1}{2\times3}\dfrac{\Delta_2^3}{h^3}\\ \vdots\end{cases}$$

式中：$\Delta_0,\Delta_1,\Delta_2,\cdots$——一阶差分；

$\Delta_0^2,\Delta_1^2,\Delta_2^2,\cdots$——二阶差分；

$\Delta_0^3,\Delta_1^3,\Delta_2^3,\cdots$——三阶差分；

将上列各阶差商定义公式代入式(9—22)，得：

$$y=y_0+\frac{\Delta_0}{h}(x-x_0)+\frac{\Delta_0^2}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1)+\frac{\Delta_0^3}{3!h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)+\cdots \tag{9—23}$$

若所讨论的经验公式为二次多项式，则式(9—23)取3项已够，即可写成下列形式：

$$\hat{y}=b_0+b_1x+b_2x^2 \tag{9—24}$$

式中的回归参数可按下式计算：

$$b_0=y_0-\frac{\Delta_0}{h}x_0+\frac{\Delta_0^2}{2h^2}x_0x_1$$

$$b_1=\frac{\Delta_0}{h}-\frac{\Delta_0^2}{2h^2}x_0-\frac{\Delta_0^2}{2h^2}x_1$$

$$b_2=\frac{\Delta_0^2}{2h^2}$$

若所讨论的经验公式为三次多项式，则式(9—23)要取4项，写成

$$\hat{y}=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3 \tag{9—25}$$

式中的回归参数按下式计算：

$$b_0=y_0-\frac{\Delta_0}{h}x_0+\frac{\Delta_0^2}{2!h^2}x_0x_1-\frac{\Delta_0^3}{3!h^3}x_0x_1x_2$$

$$b_1=\frac{\Delta_0}{h}-\frac{\Delta_0^2}{2h^2}x_0-\frac{\Delta_0^2}{2h^2}x_1+\frac{\Delta_0^3}{3!h^3}x_0x_1$$

$$+\frac{\Delta_0^3}{3!h^3}x_0x_2+\frac{\Delta_0^3}{3!h^3}x_1x_2$$

$$b_2=\frac{\Delta_0^2}{2h^2}-\frac{\Delta_0^3}{3!h^3}x_0-\frac{\Delta_0^3}{3!h^3}x_1-\frac{\Delta_0^3}{3!h^3}x_2$$

$$b_3=\frac{\Delta_0^3}{3!h^3}$$

例 9—9 下列测量数据(表 9—14)以三次多项式 $y=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$ 拟合，试用插入法求其回归参数。

表 9—14　　　　例 9—9 数据表

x	7	12	17	22	27	32	37
y	83.70	72.90	63.20	54.70	47.50	41.70	37.40

解：测量数据的自变量 x 布点已是等间隔的，故数据处理时，可直接列出测量数据的差分表(见表 9—15)。

表 9—15　　　　例 9—9 差分计算

x	y	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
7	83.70	−10.80			
12	72.90	−9.70	1.10	0.10	
17	63.20	−8.50	1.20	0.10	0
22	54.70	−7.20	1.30	0.10	0
27	47.50	−5.80	1.40	0.10	0
32	41.70	−4.30	1.50		
37	31.40				

应用公式(9—25)，得：

$$b_3=\frac{0.1}{6\times125}=0.000\,136$$

$$b_0=83.70-\frac{(-10.80)}{5}\times7+\frac{1.1}{2\times25}\times7\times12-\frac{0.1}{6\times125}\times7\times12\times17$$

$$=100.48$$

$$b_1=\frac{-10.80}{5}-\frac{1.1}{2\times25}\times7-\frac{1.1}{2\times25}\times12+\frac{0.1}{6\times125}\times7\times12$$

$$+\frac{0.1}{6\times125}\times7\times17+\frac{0.1}{6\times125}\times12\times17=-2.524$$

$$b_2=\frac{1.1}{2\times25}-\frac{0.1}{6\times125}\times7-\frac{0.1}{6\times125}\times12-\frac{0.1}{6\times125}\times17$$

$$=0.017\ 1$$

故所求经验公式为

$$\hat{y}=100.48-2.524x+0.017\ 1x^2+0.000\ 136x^3$$

验算如下(见表 9—16)。

表 9—16　　　　例 9—9　验算数据表

x	7	12	17	22	27	32	37
y	83.70	72.90	63.20	54.70	47.50	41.70	37.40
$\hat{y}$	83.70	72.89	63.18	54.68	47.48	41.68	37.39
v	0	0.01	0.02	0.02	0.02	0.02	0.01

通过验算,所求得的经验公式与测量数据最大偏离为 0.02。由于式(9—25)是由式(9—23)截取前 4 项推算得到的,若截取更多项,回归精度还可提高,但计算就更为繁琐。

四、相关系数

在一元线性经验公式一节中,曾讨论过回归直线回归精度的高低,可由相关系数 ρ 来衡量,ρ 由定义式(9—16)直接给出。ρ 的绝对值愈接近于 1,回归精度就愈高,也即回归直线与实验点的拟合就愈好。

曲线回归的情况则稍有不同,但我们要求的当然仍是使所配的回归曲线与实验点得到很好的拟合,因此,不能应用式(9—16),而用式(9—19)就比较合理,即

$$\rho^{*2}=\frac{U}{S}=\frac{\sum(\hat{y}-\bar{y})^2}{\sum(y-\bar{y})^2}$$

或由残差平方和表示,即

$$\rho^{*2}=1-\frac{Q}{S}=1-\frac{\sum(y-\hat{y})^2}{\sum(y-\bar{y})^2}$$

并以它作为衡量曲线拟合好坏的指标,为区别于直线回归的情况,引入新的代号 ρ^*,即

$$\rho^*=\sqrt{1-\frac{\sum(y-\hat{y})^2}{\sum(y-\bar{y})^2}}\qquad(9—26)$$

ρ^{*2}称为相关指数,它的平方根 ρ^* 称为相关系数,ρ^* 愈大,则表明所配的曲线拟合效果愈好。

与一元线性经验公式的情况一样,$s=\sqrt{\frac{\sum(y-\hat{y})^2}{n-2}}$ 称为剩余标准差,它可作为衡量所

配曲线拟合精度的标准。

例 9—10 试计算例9—8所列测量数据与所配置的指数曲线 $y=16.056x^{0.60480}$的相关系数。

解：按表 9—17 顺序进行数据处理。

表 9—17 **例 9—10 数 据 表**

x	y	$y-\bar{y}$	$(y-\bar{y})^2$	$\hat{y}$	$y-\hat{y}$	$(y-\hat{y})^2$
2	24.50	−95.26	9 074.5	24.417	0.083	0.007 1
4	37.00	−82.76	6 849.2	37.133	−0.133	0.017 4
8	56.80	−62.96	3 963.9	56.471	0.329	0.108 9
16	85.50	−34.26	1 173.7	85.879	−0.379	0.143 6
25	112.50	−7.26	52.7	112.489	0.011	0.000 1
32	129.50	9.74	94.9	130.603	−1.103	1.218 8
50	171.50	51.74	2 677.0	171.070	0.430	0.182 3
64	200.00	80.24	6 438.5	198.616	1.384	1.901 6
100	260.50	140.74	19 807.7	260.158	0.342	0.111 6

$\bar{y}=119.76 \quad S=50\ 132.1 \qquad\qquad Q=3.7105$

故得相关指数为

$$\rho^{*2}=1-\frac{Q}{S}=1-\frac{3.710\ 5}{50\ 132.1}\approx 0.999\ 93$$

其相关系数

$$\rho^{*}=\sqrt{0.999\ 93}=0.999\ 96\approx 1$$

所以配置的指数曲线与实验点的拟合是很好的。

§9—4 多元线性经验公式

多元线性经验公式是反映一个因变量与两个或两个以上自变量关系的线性函数式。许多工程实验中常涉及两个或两个以上影响因变量的因素。多元线性经验公式的一般形式为

$$\hat{y}=a_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots \tag{9—27}$$

式中：$\hat{y}$——因变量（y 的估计量）；

$x_1, x_2, \cdots$——自变量；

$a_0, a_1, a_2, \cdots$——多元回归参数。

原则上，上述计算一元线性经验公式回归参数的方法，都可用于多元线性经验公式的情况，以下只介绍一种回归精度较高的最小二乘法。为了计算简单，先计算具有两个自变量的情况。

正如一组测量数据(x_i, y_i)可以在两维图上求得一条最小二乘直线那样，一组测量数据

(x_{1i}, x_{2i}, y_i)可以在三维图上求出其最小二乘平面。各实验点距离该平面的偏离平方和E为

$$E = \sum (y - \hat{y})^2 = \sum (y - a_0 - a_1x_1 - a_2x_2)^2$$

回归参数a_0, a_1, a_2应该是当E为最小时的估计量，为此，应将E分别对a_0, a_1, a_2求导，并使其导函数为零，以得到下列方程组：

$$\left.\begin{aligned} \sum y &= na_0 + a_1\sum x_1 + a_2\sum x_2 \\ \sum yx &= a_0\sum x_1 + a_1\sum x_1^2 + a_2\sum x_1x_2 \\ \sum yx &= a_0\sum x_2 + a_1\sum x_1x_2 + a_2\sum x_2^2 \end{aligned}\right\} \tag{9—28}$$

式(9—28)称为正规方程组，方程中的n为测量数据的点数。解此正规方程组，就可以得出回归参数a_0, a_1与a_2。但是，通常为了简化计算，人们常以变量与其均值之差即$(x_1 - \bar{x}_1, x_2 - \bar{x}_2, y - \bar{y})$来建立另一形式的方程，这样变换的结果，可使正规方程组减少一个方程式。由于

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$$

因而

$$\bar{y} = a_0 + a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2$$

故

$$y - \bar{y} = a_1(x_1 - \bar{x}_1) + a_2(x_2 - \bar{x}_2)$$

或写成

$$y' = a_1x_1' + a_2x_2' \tag{9—29}$$

式中，$y' = y - \bar{y}$，$x_1' = x_1 - \bar{x}_1$，$x_2' = x_2 - \bar{x}_2$。

于是，式(9—29)的正规方程组就可表示为

$$\left.\begin{aligned} \sum y'x'_1 &= a_1\sum x'^2_1 + a_2\sum x'_1x'_2 \\ \sum y'x'_2 &= a_1\sum x'_1x'_2 + a_2\sum x'^2_2 \end{aligned}\right\} \tag{9—30}$$

解此方程组，可得a_1和a_2为

$$a_1 = \frac{(\sum y'x'_1)(\sum x'^2_2) - (\sum x'_1x'_2)(\sum y'x'_2)}{(\sum x'^2_1)(\sum x'^2_2) - (\sum x'_1x'_2)^2} \tag{9—31}$$

$$a_2 = \frac{(\sum y'x'_2)(\sum x'^2_1) - (\sum x'_1x'_2)(\sum y'x'_1)}{(\sum x'^2_1)(\sum x'^2_2) - (\sum x'_1x'_2)^2} \tag{9—32}$$

参数a_1, a_2确定后，就可计算第三个参数a_0，即

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x}_1 - a_2\bar{x}_2 \tag{9—33}$$

这样就得到了具有两个自变量的线性经验公式，即

$$\hat{y} = \bar{y} + a_1(x_1 - \bar{x}_1) + a_2(x_2 - \bar{x}_2)$$

或写作

$$\hat{y} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \tag{9—34}$$

若用矩阵进行计算，则由式(9—29)可建立方程为

$$\hat{Y} = \hat{X}A \tag{9—35}$$

式中

$$\hat{Y} = \underset{(n\times1)}{\hat{Y}} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} \qquad \hat{X} = \underset{(n\times2)}{\hat{X}} = \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{21} \\ x'_{12} & x'_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x'_{1n} & x'_{2n} \end{pmatrix}$$

$$A = \underset{(2\times1)}{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

以上矩阵中的元素 x 的第 1 个脚标是自变量 x 的序号；x 的第 2 个脚标与 y 的脚标代表实验点的序号。

由最小二乘法原理，可得类似于式(9—15)的结果，即

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (\mathring{X}'\mathring{X})^{-1}\mathring{X}'\mathring{Y} \tag{9—36}$$

由于

$$\underset{(2\times2)}{\mathring{X}'\mathring{X}} = \begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \cdots & x'_{1n} \\ x'_{21} & x'_{22} & \cdots & x'_{2n} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x'_{11} & x'_{21} \\ x'_{12} & x'_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x'_{1n} & x'_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x'^2_1 & \sum x'_1 x'_2 \\ \sum x'_1 x'_2 & \sum x'^2_2 \end{bmatrix}$$

$$(\underset{(2\times2)}{\mathring{X}'\mathring{X}})^{-1} = \frac{1}{(\sum x'^2_1)(\sum x'^2_2) - (\sum x'_1 x'_2)^2} \begin{bmatrix} \sum x'^2_2 & -\sum x'_1 x'_2 \\ -\sum x'_1 x'_2 & \sum x'^2_1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{(2\times1)}{\mathring{X}'\mathring{Y}} = \begin{bmatrix} x'_{11} & x'_{12} & \cdots & x'_{1n} \\ x'_{21} & x'_{22} & \cdots & x'_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x'_1 y' \\ \sum x'_2 y' \end{bmatrix}$$

将上列$(\mathring{X}'\mathring{X})^{-1}$，$\mathring{X}'\mathring{Y}$ 的计算结果，代入式(9—36)，就可得到与式(9—31)，式(9—32)相同的结果。a_0 仍可按式(9—33)计算。

当多元线性经验公式具有 m 个自变量时，式(9—36)仍可适用。此时，待定的回归参数共有$(m+1)$个，其中，a_0 按式(9—37)计算，其余由式(9—35)算出。显然，矩阵 A，$\mathring{X}'\mathring{X}$，$\mathring{X}'\mathring{Y}$ 各为

$$\underset{(m\times1)}{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

$$\underset{(m\times m)}{\mathring{X}'\mathring{X}} = \begin{bmatrix} \sum x'^2_1 & \sum x'_1 x'_2 & \cdots & \sum x'_1 x'_m \\ \sum x'_2 x'_1 & \sum x'^2_2 & \cdots & \sum x'_2 x'_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \sum x'_m x'_1 & \sum x'_m x'_2 & \cdots & \sum x'^2_m \end{bmatrix}$$

$$\mathring{X}'\mathring{Y} = \begin{bmatrix} \sum x'_1 y' \\ \sum x'_2 y' \\ \cdots \\ \sum x'_m y' \end{bmatrix}$$

将 $\mathring{X}'\mathring{X}$ 求逆后，与 $\mathring{X}'\mathring{Y}$ 一起代入式(9—35)，即可得出 $a_1, a_2, \cdots, a_m$。

而 a_0 为

$$a_0=\bar{y}-a_1\bar{x}_1-a_2\bar{x}_2-\cdots-a_m\bar{x}_m \tag{9—37}$$

这样,就得到多元线性经验公式为

$$\hat{y}=\bar{y}+a_1(x_1-\bar{x}_1)+a_2(x_2-\bar{x}_2)+\cdots+a_m(x_m-\bar{x}_m)$$

或写作

$$\hat{y}=a_0+a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_mx_m \tag{9—38}$$

例 9—11 试将表9—18所列测量数据按线性关系确定其间的关系。

表 9—18 **例 9—11 测量数据**

y	x_1	x_2	y	x_1	x_2
15.0	2.8	744	11.0	9.8	752
14.0	4.2	749	11.2	11.2	751
14.3	5.6	747	10.2	12.6	757
12.7	7.0	745	10.4	14.0	756
12.0	8.4	754	9.9	15.4	757

解:先计算变量的均值,得:

$$\bar{y}=12.09,\ \bar{x}_1=9.1,\ \bar{x}_2=751.2$$

再按表 9—19 顺序进行数据处理,利用式(9—31)及式(9—32),得:

$$a_1=\frac{(\sum y'x'_1)(\sum x'^2_2)-(\sum x'_1x'_2)(\sum y'x'_2)}{(\sum x'^2_1)(\sum x'^2_2)-(\sum x'_1x'_2)^2}$$

$$=\frac{-68.95\times 211.6-162.4\times(-71.38)}{161.7\times 211.6-162.4^2}=\frac{-2\,997.71}{7\,841.96}=-0.382$$

$$a_2=\frac{(\sum y'x'_2)(\sum x'^2_1)-(\sum x'_1x'_2)(\sum y'x'_1)}{(\sum x'^2_1)(\sum x'^2_2)-(\sum x'_1x'_2)^2}$$

$$=\frac{-71.38\times 161.7-162.4\times(-68.95)}{161.7\times 211.6-162.4^2}=\frac{-344.666}{7\,841.96}=-0.044\,0$$

故所求经验公式为

$$\hat{y}-\bar{y}=-0.382(x_1-\bar{x}_1)-0.044\,0(x_2-\bar{x}_2)$$

将各变量的均值 $\bar{y}=12.09$,$\bar{x}_1=9.1$ 及 $\bar{x}_2=751.2$ 代入,整理后得:

$$\hat{y}=48.62-0.382x_1-0.044\,0x_2$$

在多元线性经验公式中,与一元的情形一样,检验回归精度的高低,或者说检验 y 与

表 9—19 **例 9—11 数 据 处 理 表**

$y'=y-\bar{y}$	$x'_1=x_1-\bar{x}_1$	$x'_2=x_2-\bar{x}_2$	$y'x'_1$	$y'x'_2$	$x'_1x'_2$	x'^2_1	x'^2_2
2.91	-6.3	-7.2	-18.333	-20.952	45.36	39.69	51.84
2.11	-4.9	-2.2	-10.339	-4.642	10.78	24.01	4.84
2.21	-3.5	-4.2	-7.735	-9.282	14.70	12.25	17.64
0.61	-2.1	-6.2	-1.281	-3.782	13.02	4.41	38.44
-0.09	-0.7	2.8	0.063	-0.252	-1.96	0.49	7.84
-1.09	0.7	0.8	-0.763	-0.872	0.56	0.49	0.64
-0.89	2.1	-0.2	-1.869	0.178	-0.42	4.41	0.04
-1.89	3.5	5.8	-6.615	-10.962	20.30	12.25	33.64
-1.69	4.9	4.8	-8.281	-8.112	23.52	24.01	23.04
-2.19	6.3	5.8	-13.797	-12.702	36.54	39.69	33.64
求和			$\sum y'x'_1=-68.95$	$\sum y'x'_2=-71.38$	$\sum x'_1x'_2=162.4$	$\sum x'^2_1=161.7$	$\sum x'^2_2=211.6$

$x_1,x_2,\cdots,x_m$ 线性关系密切的程度,可用回归平方和 U(或者残差平方和 Q)在总平方和 $S=l_{yy}$中所占的比例来衡量,用下式定义的量 ρ^* 为

$$\rho^*=\sqrt{\frac{U}{l_{yy}}}=\sqrt{1-\frac{Q}{l_{yy}}}=\sqrt{1-\frac{\sum(y-\hat{y})^2}{\sum(y-\bar{y})^2}} \qquad (9—39)$$

ρ^* 也可表示 y 与 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 线性相关的密切程度,称为多元相关系数。ρ^* 的数值愈接近于 1,回归的精度就愈高。

例如,在例 9—11 中,要检验其回归精度时,可以分别计算:

$$\sum(y-\bar{y})^2=31.39$$

$$\sum(y-\hat{y})^2=1.92$$

于是

$$\rho^*=\sqrt{1-\frac{1.92}{31.39}}=0.97$$

或

$$\rho^{*2}=0.94$$

可见,相关是良好的,即经验公式与实验点拟合是良好的。

第十章　随机过程及其数据处理基础

§10—1　概　　述

随着科学技术的发展，特别是电子技术、自动控制、计算技术和电子计算机的飞速发展，动态测量在科学研究和生产实践中的应用也越来越广泛。

在机械制造业中，例如用各种动态测量仪检测丝杠、齿轮等典型零件和一些形位参数，以及零件在加工过程中的某些自动检测和振动、速度等动力参数的实时测量，都属动态测量的范畴。

动态测量是在静态测量的基础上发展起来的，两者有不少共性和相似之处，但又有很大的本质性的差异。

本书前面各章所涉及的，主要是对某一物理量（如尺寸）或若干个物理量作多次重复测量，着重论述测量结果的统计特性和数据处理方法。其特点为被测值是不随时间连续变化的静态量值，测量取值时，测量系统（测量器具或装置）也多处于稳定的静态。

动态测量则复杂得多。测量对象是随时间（或空间）而连续变化的动态量值。其原始的单次测量结果是一具体函数或记录曲线（静态测量为一具体数值），而多次重复的测量结果，是由一组具体函数体现的随机函数（一般是以时间 t 为自变量），也叫作随机过程（静态测量是由一组具体数值体现的随机变量）。动态测量系统在显示测量结果的过程中，它本身也是处于连续变化的运动状态。基于上述，可以这样看，静态测量是动态测量的一种特例。

和静态测量一样，动态测量数据处理的主要目的，也是要对测得数据进行合理处理，以求能精确而可靠地给出测量结果，并对测量误差进行估算和评定。

§10—2　随机过程及其特征量

一、随机过程的基本概念

由于动态测量结果表现为一随机过程，所以我们首先要了解随机过程的基本概念。图10—1所示为第1,2,3,…及第 N 次动态重复测量结果的记录曲线。其中，每一条曲线叫作一个“样本”（样本函数）或“实时”，它是一个非随机的确定函数。理论上，每一条具体曲线都可用一具体函数来表示，但太复杂（有少数例外），实际上很难作到，或者是很难精确地作到，而且实用上也无此必要。因此，我们实际研究的对象，就是这些曲线组（样本函数组）。

一般曲线组的横坐标都是时间 t，即表示随机函数（随机过程）以时间 t 为自变量。例如，当切削用量一定时，自动加工中工件尺寸的变化，就是时间 t 的随机函数。动态测量常将被测的非电量变换为电量，而测量电流、电压等电量时，其波形的延展，也是以时间 t 为自变量。

在几何量的动态测量中，通常遇到的是以长度或角度值为自变量。例如测量导轨的直线

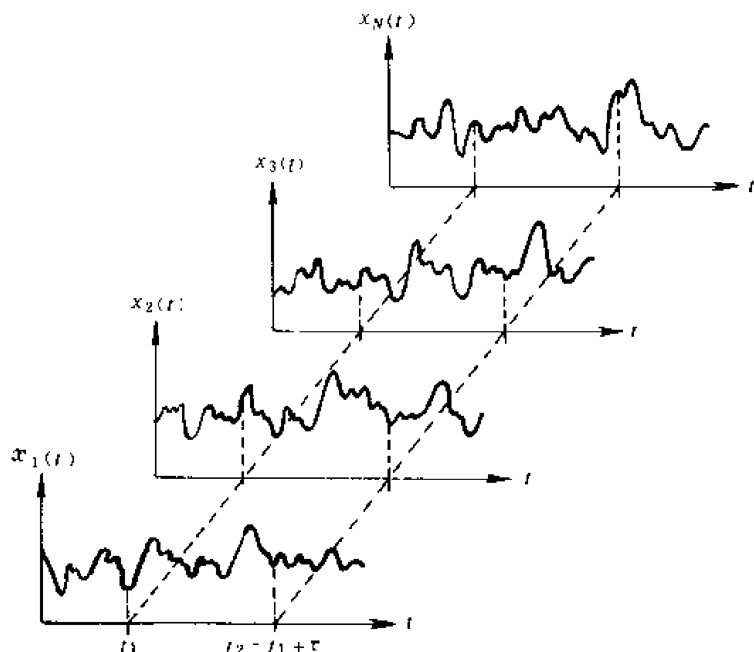


图 10—1

度误差，就是以被测长度 l 为自变量；测量轴件的圆度误差，是以转角 θ 为自变量。这种随机过程（有人叫作随机场），其研究方法和处理措施和一般以时间 t 为自变量的随机函数是一样的。

随机过程（随机函数）可用 $X(t)$表示，它是许多样本 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_N(t)$的总体（集合）即

$$X(t)=\{x_1(t),x_2(t),\cdots,x_N(t)\}$$

在每一个具体时刻，即随机函数自变量（时间 t）的每一个给定值，称为一个截口，如图 10—1 中的 t_1 或 $t_2=t_1+\tau$ 等。$X(t)$在某一截口（如 t_1 截口）上的含义，是一组随机变量 $x_1(t_1),x_2(t_2),\cdots,x_N(t_1)$的总体，如图 10—1 中用虚线表示的各坐标值。如果是测量轴件的圆度，那某个截口就可近似地看作是在被测圆周上的某一点作 N 次静态重复测量的结果。因此，随机过程可看作是相互有统计关联的无穷多个截口的总和；每个样本（记录曲线）是无穷多个点（静态测量的结果）的总和。当然，这只是从形态上区分静态测量和动态测量。

从图 10—1 中的横坐标来看，各曲线具有函数的性质，从垂直于坐标平面的纵向来看，各截口具有随机变量的性质，所以随机过程兼有随机变量和函数两方面的特点，研究随机过程，要时刻注意这一特点。

二、随机过程的特征量

随机过程的数据处理，过去多用所谓“模拟法”，即用各种模拟式仪器对代表被测量值的电量进行测量（主要是电压和电流测量），并通过各种电路进行运算处理。随着电子计算机的迅速发展，动态测量的数据处理，主要是用数字计算机和各种微处理机。这就要求对测得的样本

(记录曲线)进行离散采样,从许多个截口上得出数字系列,一般是按时间间隔的顺序采样,故简称时间序列。对被测非电量经传感器转换成的电量,要进行数字化处理。

我们知道,随机变量可用数字特征量来表征,如用算术平均值 $\bar{x}$ 和方差 σ^2 或标准差 σ 等。随机过程也一样,要用一定的特征量来分析和描述。常用的特征量有算术平均值函数(简称均值函数)、方差函数、自相关函数和谱密度函数(主要用于平稳随机过程,见后)。

1. 均值函数和方差函数

由上述可知,从随机过程的每一个截口,都可取得一组形式上相当于定点静态测量结果的随机变量,然后按照以前叙述的方法,计算出每一截口的均值 $\bar{x}$ 和方差 σ^2。

如在 t_1 截口,有均值

$$\bar{x}_{t_1}=\frac{\sum_{i=1}^{N}x_i(t_1)}{N} \tag{10—1}$$

方差(按贝塞尔公式)为

$$\sigma_{t_1}^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}[x_i(t_1)-\bar{x}_{t_1}]^2}{N-1} \tag{10—2}$$

式中,N 为取样曲线数目(样本数目),即重复测量的次数。

这样,曲线组(如图 10—1)上无穷多个截口的均值 $\bar{x}_i$ 和方差 σ_i^2 分别连接起来而形成的新的曲线,就可表示随机过程的均值函数和方差函数。它们都是非随机的时间函数,必要时(一般无此必要),可通过对足够多的截口的 $\bar{x}_i$ 和 σ_i^2 值分别进行回归处理,求出其函数式。

均值函数 $m_x(t)$ 为随机函数 $X(t)$ 的数学期望。即

$$m_x(t)=E[X(t)] \tag{10—3}$$

方差函数 $\sigma_x^2(t)$ 为随机函数 $X(t)$ 的二阶中心距。即

$$\sigma_x^2(t)=D[X(t)]=E\{[x(t)-m_x(t)]^2\} \tag{10—4}$$

随机函数的标准差为

$$\sigma_x(t)=\sqrt{E\{[x(t)-m_x(t)]^2\}}$$

随机函数的二阶原点距称为均方值,以 $\psi_x^2(t)$ 表示,其表达式为

$$\psi_x^2(t)=E[x^2(t)] \tag{10—5}$$

方差和均方值可反映随机过程的强度(见后)。

由式(10—4)有

$$\begin{aligned}\sigma_x^2(t)&=E[x^2(t)-2x(t)m_x(t)+m_x^2(t)]\\&=E[x^2(t)]-2m_x(t)E[x(t)]+m_x^2(t)\\&=\psi_x^2(t)-m_x^2(t)\end{aligned}$$

即

$$\psi_x^2(t)=\sigma_x^2(t)+m_x^2(t) \tag{10—6}$$

式(10—6)为均方值分量式。当均值函数 $m_x(t)=0$,即对已中心化的随机函数,均方值函数即等于方差函数。

例 10—1[16] 为 1 m 线纹尺分段检定,在每 100 mm 处重复测量 6 次,所得结果列于表 10—1。这可看作是一个以尺长 L 为自变量的随机过程。

表 10—1 (μm)

序号	尺寸段/mm									
	0~100	0~200	0~300	0~400	0~500	0~600	0~700	0~800	0~900	0~1000
1	0.18	0.34	0.63	1.20	1.51	2.02	2.22	2.62	2.54	2.64
2	0.30	0.38	0.70	1.26	1.55	2.10	2.26	2.66	2.56	2.66
3	0.30	0.42	0.67	1.22	1.52	2.01	2.16	2.69	2.60	2.67
4	0.25	0.34	0.69	1.22	1.54	1.96	2.22	2.72	2.64	2.66
5	0.30	0.38	0.73	1.30	1.58	2.03	2.28	2.71	2.69	2.71
6	0.33	0.44	0.76	1.28	1.60	2.08	2.31	2.78	2.70	2.81
m_x	0.277	0 383	0.697	1.247	1.550	2.033	2.242	2.697	2.622	2.692
σ_x	0.054	0.041	0.045	0.039	0.035	0.050	0.053	0.055	0.066	0.062

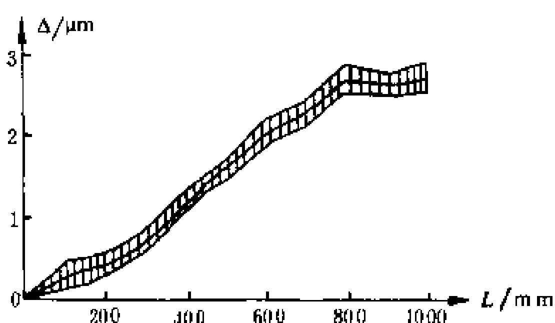


图 10—2

表中的测量尺寸分段，是为了便于计算自相关函数(见后)。表中末两行 m_x 和 σ_x，是以测得的数据按式(10—1)和式(10—2)计算得出的各尺寸段的均值和标准差。按其值作图，如图 10—2 所示。图中，剖面线部分表示 $\pm 3\sigma_x$ 的范围。

从表中的 m_x 值或从图中均可看出，该被检尺有一明显的随尺长延伸而基本上是呈线性增长的系统误差，而各截口的随机误差(以 σ_x 表示)则比较接近。

2. 自相关函数

均值和方差可描述随机过程在某个截口(即某一时刻)所获得的一组随机变量的统计特性。用实验方法得出的均值函数和方差函数，从本质上看，也只是各个截口的特征量的集合，它们虽能说明随机过程的某些情况，但还不够。因为对随机过程，常需了解过程中前后截口(不同时刻)随机变量之间的统计依赖关系或相关情况，即后面某一截口随机变量的取值，对前面某一截口的随机变量是否有某种联系？特别是线性联系，其线性依赖程度如何？此外，有时还需了解变化过程中的频率成分，故需要有一反映此相关程度的特征量，它就是自相关函数，简称相关函数。

图 10—3 所示两个随机过程，其均值曲线大体上相同、方差曲线(未画出，可采样计算)或离散范围也相近，但过程前后的统计依赖关系，即相对变化却大不相同。图 10—3(a)变化缓慢，规律性较强，低频因素，如低频信号、低频误差等在过程中起主导作用；而高频因素则相对地影响较小。过程中各截口(如图中的 t 和 $t'=t+\tau$ 截口)随机变量的分布，有明显的线性联系和规律性，即相关性强。

图 10—3(b)则相反，过程前后变化剧烈，无明显规律和联系，相关性弱，各种频率成分都在其中起作用。通过后面的进一步说明，我们将知道这两种随机过程有很大的实质差异，因此，就有必要引用一特征量来描述这种差别。

在前面第六章讨论两个随机变量 x, y 的独立性和相关性时，曾引用协方差 $\mathrm{cov}(x, y)$ 的

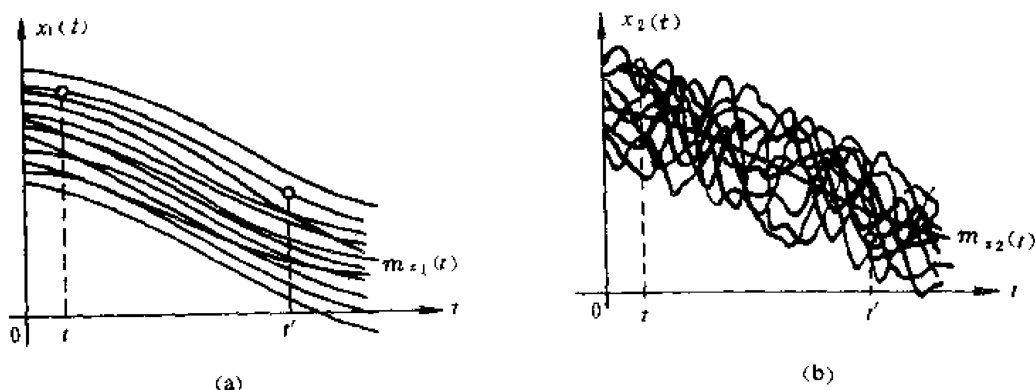


图 10—3

概念,即

$$\operatorname{cov}(x,y) = E\{[x - E(x)][y - E(x)]\}$$

对随机过程来说,在分析两截口的相关性时,就可把两截口的两组随机变量 $x(t)$和 $x(t+\tau)$(图 10—1),类似地按上式中的两随机变量 x,y 来处理。于是有

$$K_x(t,t+\tau) = E[\{x(t) - E[x(t)]\}\{x(t+\tau) - E[x(t+\tau)]\}]$$
$$= E[\{x(t) - m_x(t)\}\{x(t+\tau) - m_x(t+\tau)\}] \qquad (10\text{—}7)$$

$K_x(t,t+\tau)$叫作自相关函数(是一个二元的非随机函数),以区别于两个随机过程之间的互相关函数,可描述随机过程任意两截口之间的相关情况,即可反映后一截口随机变量的取值对前一截口随机变量取值的线性依赖程度。

在实际应用中,可设法使均值函数 $m_x(t)=0$。如用高通滤波的方法滤除 $m_x(t)$,或对 $x(t)$曲线逐点减去$m_x(t)$。$m_x(t)=0$ 的随机函数,叫作中心化的随机函数,这里用 $x^0(t)$表示,于是式(10—7)可写成

$$K_x(t,t+\tau) = E[x^0(t)x^0(t+\tau)] \qquad (10\text{—}8)$$

为了实用计算方便,自相关函数还可采用无量纲的"标准自相关函数"的形式,其定义为

$$\rho_x(t,t+\tau) = \frac{K_x(t,t+\tau)}{\sigma_x(t)\sigma_x(t+\tau)} \qquad (10\text{—}9)$$

这和两个随机变量 x,y 的相关系数的形式也是对应的。即

$$\rho_{x,y} = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}$$

$\rho_x(t,t+\tau)$也是在 0~1 之间,等于零意味着完全独立,无相关性;等于 1 时为完全相关。当 $\tau=0$ 时,即表示同一截口 t 的自身相关,这当然是完全相关。此时有

$$K_x(t,t) = E\{[x^0(t)]^2\} = \sigma_x^2(t) = \psi_x^2(t) \qquad (10\text{—}10)$$

$$\rho_x(t,t) = \frac{\sigma_x^2(t)}{\sigma_x(t)\sigma_x(t)} = 1 \qquad (10\text{—}11)$$

式(10—10)说明,$\tau=0$ 的自相关函数就是随机过程的方差函数。因此,方差函数可看成自相关函数的一个特例。由此也可看出自相关函数的重要性。

按离散采样数据(如表 10—1 中的数据),根据式(10—7)计算自相关函数值,可用以下公式:

$$K_x(t,t') = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[x_i(t) - m_x(t)][x_i(t') - m_x(t')] \tag{10—12}$$

$$\begin{aligned}\rho_x(t,t') &= \frac{K_x(t,t')}{\sigma_x(t)\sigma_x(t')} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{N}[x_i(t) - m_x(t)][x_i(t') - m_x(t')]}{\left\{\sum_{i=1}^{N}[x_i(t) - m_x(t)]^2\sum_{i=1}^{N}[x_i(t') - m_x(t')]^2\right\}^{\frac{1}{2}}}\end{aligned} \tag{10—13}$$

例 10—2 按表10—1中的数据计算自相关函数值。

解: 不同的 t 和 $t'=t+\tau$,都是用式(10—13)计算。当 $l=0\sim100$ mm(相当 t),$l'=0\sim300$ mm(相当 t')时,有

$$\begin{aligned}\rho_x(l,l') = &[(0.18-0.277)\times(0.63-0.697)+(0.30-0.277)\times \\ &(0.70-0.697)+(0.30-0.277)\times(0.67-0.697)+ \\ &(0.25-0.277)\times(0.69-0.697)+(0.30-0.277)\times \\ &(0.73-0.697)+(0.33-0.277)\times(0.76-0.697)]\div \\ &\{[(0.18-0.277)^2+(0.30-0.277)^2+(0.30-0.277)^2+ \\ &(0.25-0.277)^2+(0.30-0.277)^2+(0.33-0.277)^2]\times \\ &[(0.63-0.697)^2+(0.70-0.697)^2+(0.67-0.697)^2+ \\ &(0.69-0.697)^2+(0.73-0.697)^2+(0.76-0.697)^2]\}^{\frac{1}{2}} \\ = &0.84\end{aligned}$$

用同样方法可计算各两两尺寸段之间的标准自相关函数值,将其列于表 10—2,

表 10—2 标准自相关函数值

l'/mm	l/mm									
	0~100	0~200	0~300	0~400	0~500	0~600	0~700	0~800	0~900	0~1000
0~100	1	0.82	0.84	0.75	0.72	0.50	0.40	0.71	0.63	0.68
0~200	0.82	1	0.62	0.49	0.53	0.52	0.25	0.61	0.47	0.76
0~300	0.84	0.62	1	0.90	0.98	0.45	0.79	0.86	0.87	0.87
0~400	0.75	0.49	0.90	1	0.98	0.56	0.80	0.57	0.72	0.69
0~500	0.72	0.53	0.98	0.98	1	0.48	0.63	0.79	0.84	0.88
0~600	0.50	0.52	0.45	0.56	0.48	1	0.63	0.07	-0.02	0.45
0~700	0.40	0.25	0.79	0.80	0.63	0.63	1	0.49	0.57	0.72
0~800	0.71	0.61	0.86	0.57	0.79	0.07	0.49	1	0.91	0.86
0~900	0.63	0.47	0.87	0.72	0.84	-0.02	0.57	0.91	1	0.81
0~1000	0.68	0.76	0.87	0.69	0.88	0.45	0.72	0.86	0.81	1

由表 10—2 可看出,当 $l=l'$时,即尺寸段在同一截口上相关,当然是完全相关,$\rho_x(l,l')=1$。表中数据是成斜三角形对称的,这说明自相关函数是对称函数。

对相同的间隔 $l'-l$,将 ρ_x 取平均值。如对 $l'-l=100$ mm,有

$$\rho_{100}=\frac{1}{9}(0.82+0.62+0.90+0.98+0.48+0.63+0.49+0.91+0.81)$$

$=0.74$

对 $l'-l=800$ mm 有

$$\rho_{800}=\frac{1}{2}(0.63+0.76)\approx 0.70$$

将全部 ρ 值列于表 10—3。

表 10—3 **ρ 值表**

$l'-l$/mm	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
ρ_x	1	0.74	0.62	0.57	0.65	0.64	0.64	0.68	0.70	0.68

由表 10—3 可看出，自相关函数值不随过程的延伸（l 的延长）而急剧减小，这说明过程中含有某种规律性的因素。将 ρ_x 值作回归处理，可得出自相关函数式。

3．谱密度函数（频谱函数）

随机过程可从幅域、时域和频域三方面进行描述。均值和方差函数主要是从幅域描述随机过程各截口的特征量，自相关函数是从时域描述随机过程的特征量，而从频域描述随机过程（指平稳随机过程，见后）的特征量是谱密度函数。

关于谱密度函数的含义、特性及计算方法等内容，为了阐述方便，留待稍后再介绍。

表征随机过程的特征量还有一些，但均属次要，有的实际应用很困难，这里就不一一列举了。

§10—3　平稳随机过程

随机过程有平稳和非平稳之分，实际应用中（包括动态测量），处理的大量问题是平稳随机过程。平稳随机过程在采样、分析、计算等各方面都比非平稳随机过程简单得多，因此有必要对平稳随机过程作较详细的介绍。

一、随机过程的平稳条件

一般来说●，随机过程 $x(t)$ 的统计特性不随时间 t 而变化，则此过程为平稳随机过程；否则为非平稳随机过程。因此，平稳随机过程的条件是：

(1) 均值函数为一常数，即

$$m_x(t)=m_x(m_x \text{ 为常数})$$

(2) 方差函数亦为一常数，即

$$D_x(t)=D_x(D_x \text{ 为常数})$$

(3) 自相关函数为一元函数 $K_x(\tau)$，即只取决于两截口相距的时间 τ，而与 t 无关。由前面可知，$\tau=0$ 时的自相关函数 $K_x(0)$ 即为方差函数，且为一常数，而均值函数又可通过中心化使 $m_x=0$，故平稳随机过程的主要条件是自相关函数为一元函数 $K_x(\tau)$。

图 10—4(a)所示为一平稳随机过程。而图 10—4(b)由于方差函数不为常数，图 10—4(c)

● 平稳条件有宽、严之分，这里所说的是一般工程应用的宽平稳条件、严平稳有严密的数学条件[11]。

均值函数和方差函数都不为常数，因此都是非平稳随机过程。

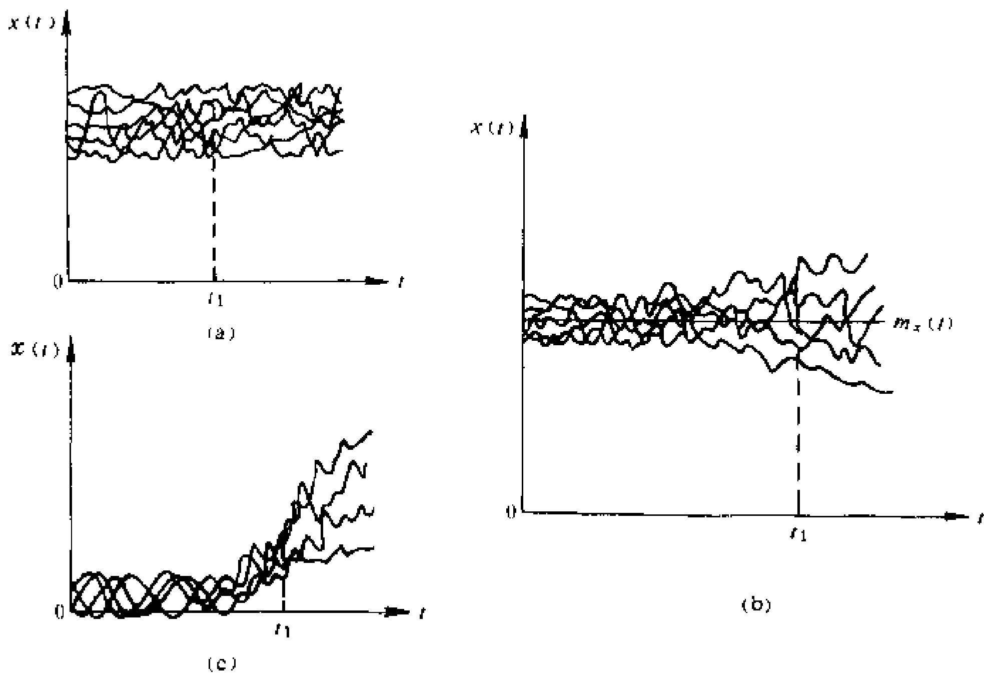


图 10—4

二、平稳随机过程的自相关函数

平稳过程的自相关函数为一元函数 $K_x(\tau)$，它具有以下性质。

(1) $K_x(\tau)$为一偶函数。因有

$$K_x(-\tau)=E[x^0(t)x^0(t-\tau)]$$
$$=E[x^0(t'+\tau)x^0(t')]=K_x(\tau)$$

式中，$t'=t-\tau$。

这样，在计算 $K_x(\tau)$的函数值时，可只考虑 $\tau\geqslant 0$ 的范围。而非平稳随机过程的自相关函数只为对称函数，不是偶函数。

(2) 当 $\tau=0$ 时，$K_x(\tau)$有最大值，且等于方差。

我们知道，任一非负的函数的数学期望均大于零值，即

$$E\{[x(0)\pm x(\tau)]^2\}\geqslant 0$$

展开后得：

$$E[x^2(0)]+2E[x(0)x(\tau)]+E[x^2(\tau)]\geqslant 0$$

对平稳过程，方差为常数，即

$$E[x^2(0)]=E[x^2(\tau)]=K_x(0)=\text{常数}$$

又有
$$E[x(0)x(\tau)]=K_x(\tau)$$

代入上式，则

$$K_x(0)\pm 2K_x(\tau)+K_x(0)\geqslant 0$$

故
$$K_x(0)\geqslant|K_x(\tau)|$$

(3) 如随机过程 $x(t)$中有周期为 T 的成分，则自相关函数 $K_x(\tau)$中也同样有周期为 T

的成分。

因有周期为 T 的成分，故

$$x(t) = x(t+T)$$

于是
$$\begin{aligned} K_x(\tau+T) &= E[x^0(t)x^0(t+\tau+T)] \\ &= E[x^0(t)x^0(t+\tau)] \\ &= K_x(\tau) \end{aligned}$$

(4) 若均值为零，而在 $\tau\to\infty$ 时，$x(t)$ 与 $x(t+\tau)$ 又互相独立(不相关)，则有

$$\lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0$$

证：
$$\begin{aligned} \lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau) &= \lim_{\tau\to\infty} E[x^0(t)x^0(t+\tau)] \\ &= \lim_{\tau\to\infty} E[x^0(t)]E[x^0(t+\tau)] = 0 \end{aligned}$$

实用中，如无周期成分，则平稳过程在 τ 很大时，其前后相关性已很微弱而呈现出明显的不相关，此时 $K_x(\tau)\to 0$。

(5) 由互相独立的若干个随机函数 $x_i(t)$ 合成的随机函数 $x(t)$ 的自相关函数，等于各个相加项随机函数的自相关函数之和。此为自相关函数的加法定理。

证：先设 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$；$t'=t+\tau$。

$$\begin{aligned} K_x(t,t') &= E[x(t)x(t')] \\ &= E\{[x_1(t)+x_2(t)][x_1(t')+x_2(t')]\} \\ &= E[x_1(t)x_1(t')] + E[x_2(t)x_2(t')] \\ &\quad + E[x_1(t)x_2(t')] + E[x_2(t)x_1(t')] \\ &= K_{x_1}(t,t') + K_{x_2}(t,t') \end{aligned}$$

同样可推证得 m 个独立随机函数之和的情况为

$$K_x(t,t') = \sum_{k=0}^{m} K_{x_k}(t,t')$$

当 $\tau=0$，即 $t'=t+\tau=t$ 时，则有

$$K_x(0) = \sum_{k=0}^{m} K_{x_k}(0)$$

此式即为方差项之和。

$$D_x = \sum_{k=0}^{m} D_{x_k}$$

理论上可 $m\to\infty$。

(6) 在随机函数 $x(t)$ 上加一非随机的确定性函数 $g(t)$ 时，$x(t)$ 的均值函数将加上同样的非随机函数 $g(t)$，而自相关函数不变。因为过程前后各截口的随机变量的相对变化没有改变。所加非随机函数可通过中心化滤除。

(7) 随机函数 $x(t)$ 乘以非随机因子 $f(t)$ 时，所得新的随机函数 $y(t)$ 的均值函数 $m_y(t)$ 也要乘上同一因子，而其自相关函数 $K_y(t,t')$ 要乘上 $f(t)f(t')$。

证：
$$\begin{aligned} m_y(t) &= E[y(t)] = E[x(t)f(t)] \\ &= f(t)E[x(t)] = f(t)m_x(t) \end{aligned}$$

$$K_y(t,t') = E[y^0(t)y^0(t')]$$

$$= E\{[y(t) - m_y(t)][y(t') - m_y(t')]\}$$
$$= E\{f(t)[x(t) - m_x(t)]f'(t)[x(t') - m_x(t')]\}$$
$$= f(t)f(t')K_x(t,t')$$

性质 6 和 7 对非平稳过程也是适用的，它在分析随机过程及对某些非平稳过程作平稳化处理时要用到。

三、平稳随机过程的谱密度函数

动态测量常需进行频谱分析，以了解动态信号（包括被测参数，测量误差等）中各种频率成分和频率分布情况，以便进行误差分析和提高测量精度，还可对被测参数进行分析，从中得出有益的结论，并为测量装置（系统）的动态特性分析提供依据。

为了说明随机函数的频谱概念，我们先来看非随机函数。大家知道，一个非随机的周期函数，其中各谐波分量可用傅立叶级数展开。如图 10—5(a)所示的周期函数，时域是以振幅－时间坐标表示的。图 10—5(b)为各次谐波分量（注意频率坐标 f），可用谐波分析法解得。图 10—5(c)即为频谱，其形式为离散频谱。

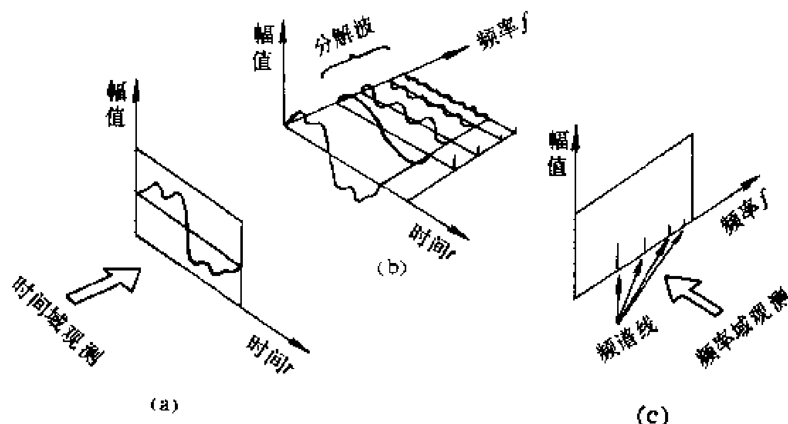


图 10—5

对非周期的确定函数，要用傅立叶积分（傅立叶级数的极限形式）来处理，其频谱要用连续的频谱函数即傅立叶变换来表示。因为一个时间函数 $x(t)$的傅立叶变换 $G(\omega)$，即为该时间函数的频谱函数，它是一个复函数，既包括幅值数据，又包括相位数据，以图 10—6(a)所示瞬态指数衰减函数为例，即

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

其频谱函数 $G(\omega)$为

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \frac{A}{\alpha + i\omega} = A(\omega) - \mathrm{i}B(\omega)$$

即 $$A(\omega) = \frac{A\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$B(\omega) = \frac{A\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

其模 $|G(\omega)|=\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}=\frac{A}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}$〔图 10—6(b)〕

当 $\omega=0$ 时,则

$$|G(\omega)|=\frac{A}{\alpha}$$

此处模 $|G(\omega)|$表示幅值;幅角 $\varphi(\omega)$即表示相位:

$$\varphi(\omega)=\text{arc tg}\left\{\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\right\}=\text{arc tg}\frac{\omega}{\alpha}$$

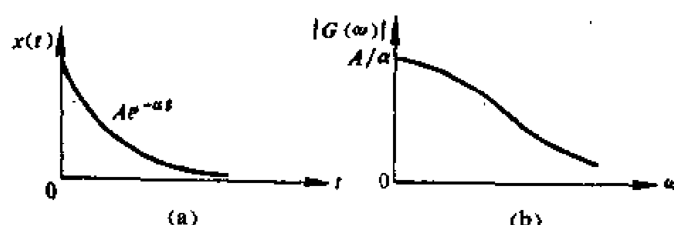


图 10—6

对随机函数,由于每一截口都有一组随机变量,其振幅和相位都是随机的,所以也不能用振幅-频率坐标来描述频谱。但对平稳随机过程(其自相关函数为一元函数),可对作为时间函数的自相关函数 $K_x(\tau)$取傅立叶变换,来求频谱函数 $S_x(\omega)$,即谱密度函数。

$$\left.\begin{aligned}S_x(\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_x(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\\K_x(\tau)&=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega\end{aligned}\right\}\qquad(10—14)$$

式(10—14)即著名的维纳-辛钦(Wiener-Khintchine)公式。即平稳随机过程的谱密度函数与该过程的自相关函数互为傅立叶变换。

这两个公式具有互相"推挽"的性质,所以 $1/(2\pi)$有的书上是放在第二式求 $K_x(\tau)$的右方积分符号之前,也有的在两式各放一个$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$,这对计算结果只差一个因子,不影响其转换规律。

由于平稳过程的自相关函数是偶函数,故式(10—14)中虚部的积分值为零,只剩有实部,因此有

$$\left.\begin{aligned}S_x(\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau\\&=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}K_x(\tau)\cos\omega\tau d\tau\\\text{及}\qquad K_x(\tau)&=\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega\\&=2\int_{0}^{\infty}S_x(\omega)\cos\omega\tau d\omega\end{aligned}\right\}\qquad(10—15)$$

引用频率 f 为变量,则又有

$$\left.\begin{aligned} S_x(f) &= 4\int_0^{\infty} K_x(\tau)\cos 2\pi f\tau \mathrm{d}\tau \\ K_x(\tau) &= \int_0^{\infty} S_x(f)\cos 2\pi f\tau \mathrm{d}f \end{aligned}\right\} \tag{10—16}$$

及

如已知自相关函数，即可按以上公式求谱密度函数；反之，已知谱密度函数，也可求自相关函数。

谱密度函数为实偶函数。即

$$S_x(-\omega) = S_x(\omega)$$

且

$$S_x(\omega) \geqslant 0$$

$S_x(\omega)$的图形对称于纵轴。

当 $\tau=0$ 时，由式(10—15)及式(10—16)有

$$\begin{aligned} K_x(0) = D_x &= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega)\mathrm{d}\omega = 2\int_0^{\infty} S_x(\omega)\mathrm{d}\omega \\ &= 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} S_x(2\pi f)\mathrm{d}f = 4\pi\int_0^{\infty} S_x(2\pi f)\mathrm{d}f \end{aligned} \tag{10—17}$$

由式(10—17)和前面介绍的自相关函数的加法定理可知，平稳过程的谱密度与方差有关。一定频域内谱密度 $S_x(\omega)$或 $S_x(2\pi f)$的积分值，即为该频域上平稳过程的方差分量，因此可用方差谱来描述平稳过程。某频率上的方差分量大，则说明该频率成分在过程中的强度也大。

图 10—7(a)为平稳过程方差分量的直方图，当 $\Delta\omega\to0$，而 $\omega\to\infty$时，方差直方图将形成如图 10—7(b)的光滑曲线图。

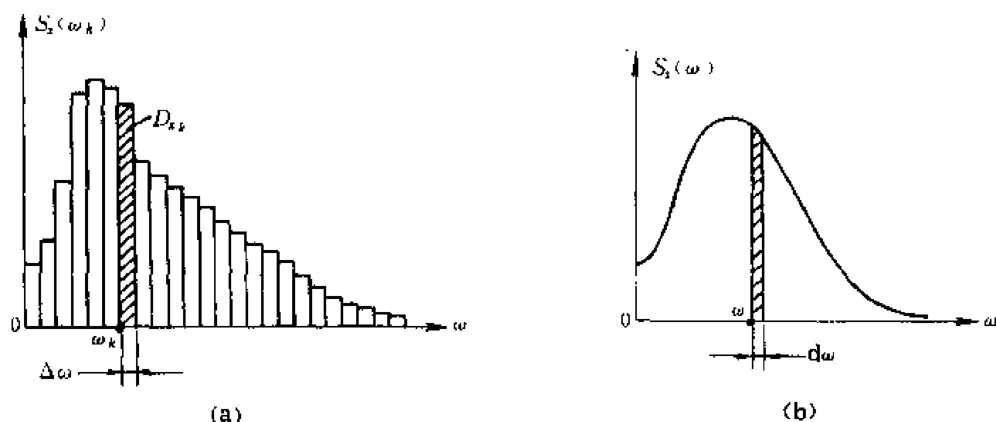


图 10—7

由于以上各式的积分限有双边对称($-\infty$与$+\infty$)和单边(0 与∞)两种形式，故谱密度或方差谱也有单边和双边之分。图 10—8 中以 $G_x(\omega)$表示单边谱密度，$S_x(\omega)$表示双边谱密度。双边谱密度的图形是对称于纵轴的。

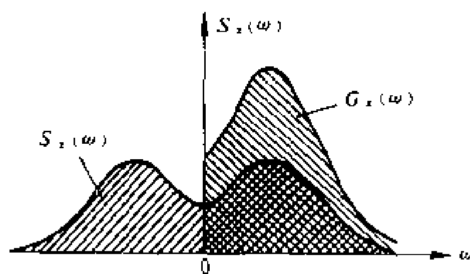


图 10—8

例 10—3 已知某平稳过程的自相关函数为 $K_x(\tau)=C\mathrm{e}^{-\alpha\tau}$($C$ 为常数，$\alpha>0$)。求其谱密度函数。

解：根据式(10—15)有

$$
\begin{aligned}
S_x(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} Ce^{-\alpha\tau}\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{C}{2\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha\tau}(\mathrm{e}^{i\omega\tau}+\mathrm{e}^{-i\omega\tau})\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{C}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}
\end{aligned}
$$

$K_x(\tau)$和 $S_x(\omega)$的图形如表 10—4 中之 1 ,α 不同,图形也不同。

当 α 减小,$K_x(\tau)$将随 τ 的延伸而减小,但减小的速度越来越缓慢,表示过程越来越平缓,低频成分占主导地位。当 $\alpha\to0$ 时,$K_x(\tau)\to C$,这表示过程前后接近完全相关,没有波动,即 $\omega\to0$,此时谱线高度$\to\infty$,其图形如表 10—4 中之 3 。这种特殊频谱可用 δ 函数表示,$S_x(\omega)=C\delta(\omega)$。

当 α 增大,$K_x(\tau)$减小,且减小的速度越来越快,这表示过程前后变化剧烈,相关性迅速减弱,各种高低频成分都起作用。当 $\alpha\to\infty$时,$K_x(\tau)\to0$,图形如表 10—4 中之 4。这种由各种等强度频率信号组成的随机过程,称为"白噪音",这是借喻于白光是由各种等强度的单色光(频率各异)混合而形成的。

表 10—4　　　　$K_x(\tau)$与 $S_x(\omega)$对照表

序号	$K_x(\tau)$	$S_x(\omega)$
1	$Ce^{-\alpha\|\tau\|}$	$\frac{C\alpha}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$
2	1; $-T$, 0, T	$\frac{2\sin^2(\omega T/2)}{\pi T\omega^2}$
3	C	$C\delta(\omega)$
4	$C\delta$	$C/2\pi$
5	$\cos\omega_0\tau$	$\frac{1}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$; $-\omega_0$, 0, ω_0
6	$\frac{2K_0}{\tau}\sin\omega_0\tau$	K_0; $-\omega_0$, 0, ω_0

四、各态历经随机过程

平稳随机过程虽比非平稳随机过程大为简化，但计算特征量，仍需从许多样本中采取大量的数据，还是相当麻烦，因此有必要探索进一步简化的过程。

如果一个随机过程，其中各个样本的均值（指在一条记录曲线上取值平均）基本上相同，每个样本相对均值上下波动的平均振幅也相近，而在采样时间足够长的条件下，这种等同性更加显著。这样，就可取任一样本函数为依据，来计算过程的特征量。这种性质，叫作各态历经性，具有这种性质的过程，叫作各态历经随机过程，如图 10—9 所示，其主要特征量的计算可进一步简化。计算公式如下：

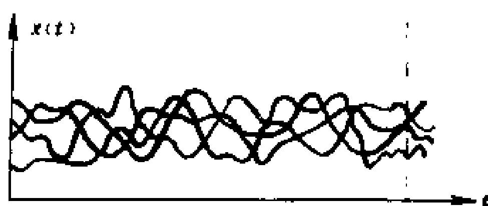


图 10—9

均值为

$$m_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{10—18}$$

式中，n 是在一个样本函数（一条记录曲线）$x(t)$ 上的采样点数，一般按等间距 Δt_i 采集数据 x_i。

方差为

$$D_x = \sigma_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 \tag{10—19}$$

标准自相关函数为

$$\rho_x(\tau) = \frac{1}{D_x}\frac{1}{(n-m)}\sum_{i=1}^{n-m}(x_i - m_x)(x_{i+m} - m_x) \tag{10—20}$$

式中：x_i, x_{i+m}——任意相隔为 τ 的两点处的函数值；

m——x_i 与 x_{i+m} 之间的采样点数。

各态历经过程是平稳过程的一种特殊情况，但不是所有的平稳过程都是各态历经过程。一个随机过程是否具备各态历经性，理论上的判断要用数学上的各态历经定理，但实际上很难做那样复杂的计算。实用中主要是根据与过程本质有关的物理知识和经验来判断。

在动态测量中，若测量条件很稳定，则随机过程可作为各态历经过程来处理。如测量很方便，也可测出多个样本曲线来观察分析，并作出是否为各态历经过程的判断。

还可以证明[2][13]，各态历经过程的充分条件是当 $\tau\to\infty$ 时，$K_x(\tau)\to 0$。若 $\tau\to\infty$，$K_x(\tau)$ 趋近某一常数，则为非各态历经过程。

例 10—4[13] 飞机水平飞行，作用在飞机上的垂直负重 p 在 200 s 时间内每隔 2 s 记录一次，共记录 100 次，数据列于表 10—5，考虑负重的变化属各态历经过程，试求其特征量。

表 10—5 **测量数据**

t/s	负重/kN	t/s	负重/kN	t/s	负重/kN	t/s	负重/kN
0	1.0	6	0.7	12	1.3	18	0.4
2	1.3	8	0.7	14	0.8	20	0.3
4	1.1	10	1.1	16	0.8	22	0.3

续表

t/s	负重/kN	t/s	负重/kN	t/s	负重/kN	t/s	负重/kN
24	0.6	68	0.8	112	0.8	156	1.2
26	0.3	70	0.8	114	1.4	158	1.3
28	0.5	72	1.2	116	1.6	160	0.9
30	0.5	74	0.7	118	1.7	162	1.3
32	0.7	76	0.7	120	1.3	164	1.5
34	0.8	78	1.1	122	1.6	166	1.2
36	0.6	80	1.5	124	0.8	168	1.4
38	1.0	82	1.0	126	1.2	170	1.4
40	0.5	84	0.6	128	0.6	172	0.8
42	1.0	86	0.9	130	1.0	174	0.8
44	0.9	88	0.8	132	0.6	176	1.3
46	1.4	90	0.8	134	0.8	178	1.0
48	1.4	92	0.9	136	0.7	180	0.7
50	1.0	94	0.9	138	0.9	182	1.1
52	1.1	96	0.6	140	1.3	184	0.9
54	1.5	98	0.4	142	1.5	186	0.9
56	1.0	100	1.2	144	1.1	188	1.1
58	0.8	102	1.4	146	0.7	190	1.2
60	1.1	104	0.8	148	1.0	192	1.3
62	1.1	106	0.9	150	0.8	194	1.3
64	1.2	108	1.0	152	0.6	196	1.6
66	1.0	110	0.8	154	0.9	198	1.5

解：按式(10—18)及式(10—19)求得均值和方差如下：

$$m_x = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} p_i = 0.98\ \text{kN}$$

$$D_x = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}(p_i - m_x)^2 = 0.104\ 5\ \text{kN}^2$$

再按式(10—20)求标准自相关函数 $\rho_x(\tau)$值，其值如表 10—6 所示。

表 10—6　　标准自相关函数值

τ/s	0	2	4	6	8	10	12	14	……
$\rho_x(\tau)$	1	0.505	0.276	0.277	0.231	−0.015	0.014	0.071	……
$\rho_x'(\tau)$	1	0.598	0.358	0.214	0.128	0.077	0.046	0.027	……

按所列 $\rho_x(\tau)$值作图如图 10—10 的虚线，根据虚线的形状，用指数函数 $\rho_x'(\tau) = e^{-a|\tau|}$逼近该虚线，用最小二乘法确定 $a \approx 0.257$。

于是该过程的自相关函数为

$$\rho_x(\tau) = e^{-0.257|\tau|}$$

对照表 10—4，可知相应的谱密度函数为

$$S_x(\omega) = \frac{a}{\pi(a^2 + \omega^2)} = \frac{0.257}{\pi(0.257^2 + \omega^2)}$$

ω 与 $S_x(\omega)$ 的关系见表 10—7。

表 10—7 ω 与 $S_x(\omega)$ 的关系

ω/(rad/s)	0	0.25	0.5	0.75	1
$S_x(\omega)$	1.24	0.64	0.26	0.13	0.08

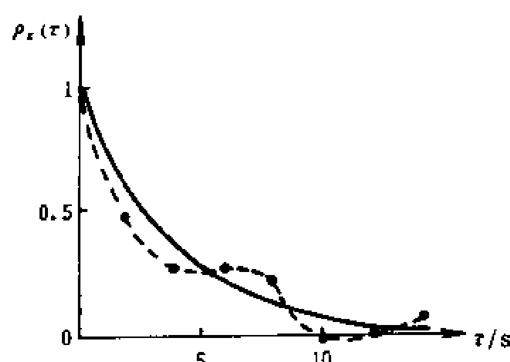


图 10—10

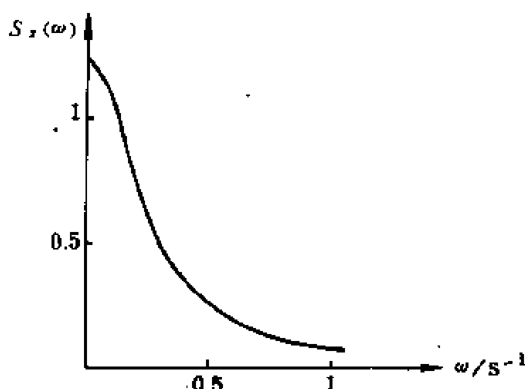


图 10—11

图 10—11 是谱密度函数的曲线，由曲线可见，这是一个低频频谱。

由图 10—10 可看出，自相关函数迅速衰减，当 τ 大到一定程度时，$K_x(\tau)\to 0$，故满足前面提到的各态历经过程的充分条件。因此，开始设定本例为各态历经过程是正确的。实践证明，工程应用上，大多数平稳随机过程都具有各态历经性。

五、非平稳过程的平稳化处理

有些非平稳随机过程，实际上是一个平稳过程再加上某一非平稳因素而形成的。如果能把非平稳因素分离出来(另行处理)，则过程仍属平稳过程，处理起来也就简便得多。

图 10—21 左方所示的 $y(t)$，即为典型的可分离的非平稳过程。它们都可分离为一平稳过程 $x(t)$ 和另一不是常数的均值函数 $m_y(t)=g(t)$。即

$$y(t) = x(t) + g(t)$$

分离 $g(t)$ 的常用方法如下：

(1) 根据一个样本或几个重叠画在一起的样本，凭眼力估计和画出 $g(t)$ 的函数曲线。这种方法的精确程度与经验有关，一般只用作粗略的简单估计。

(2) 按许多等间距的截口 t_i 上的取值，计算各样本的均值 $m_y(t_i)$，再对均值的离散数据用回归方法求出 $g(t)$ 的函数式，或再据以画出曲线。

(3) 用低通滤波器滤去高频成分，即可分离出低频的 $g(t)$ 成分，再将 $g(t)$ 曲线记录下来。

化为平稳过程 $x(t)$ 的非平稳过程 $y(t)$ 更一般的函数式可写成

$$y(t) = f(t)x(t) + g(t) \tag{10—21}$$

式中，$f(t)$ 与 $g(t)$ 均为非随机的实函数或常数。

由前面式(10—12)知，$y(t)$ 的均值 $m_y(t)$，方差 σ_y^2 和自相关函数 $K_y(t,t+\tau)$ 可计算如

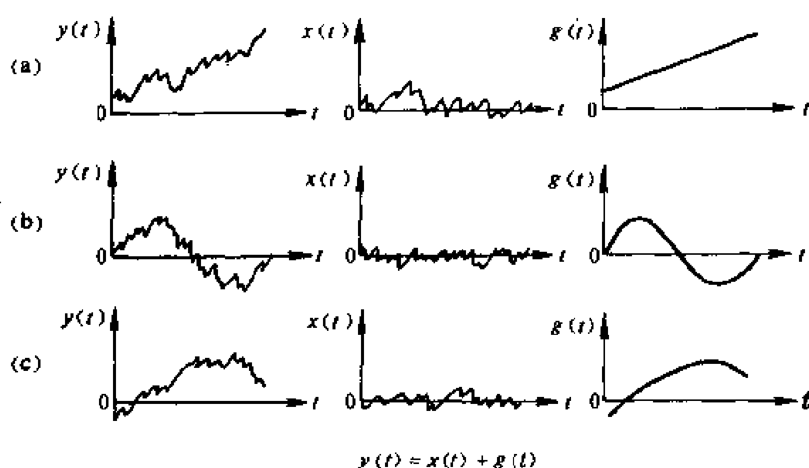


图 10—12

下：

$$m_y(t) = f(t)m_x + g(t) \tag{10—22}$$

$$D_y = \sigma_y^2 = f^2(t)K_x(0) \tag{10—23}$$

$$K_y(t,t+\tau) = f(t)f(t+\tau)K_x(\tau) \tag{10—24}$$

这样，先计算 m_x,$K_x(0)$和 $K_x(\tau)$，再按以上各式求 $m_y(t)$,D_y 和$K_y(t,t+\tau)$就方便多了。

§10—4 平稳过程的谱估计

谱估计是平稳过程(包括动态测量)数据处理的重要内容之一。平稳过程的谱估计，主要有以下两种方法。

一、间接按自相关函数求谱密度函数

这种方法是先求出自相关函数，再按上面式(10—14)，(10—15)，(10—16)或(10—17)求谱密度函数。

为求自相关函数，首先要对 N 个样本在 n 个截口上离散采样，得出 $N\times n$ 个数据，如前面表 10—1 所列。若样本的取样长度为 T，则截口间距 $\Delta = T/n$。理论及实践证明，Δ 应取为

$$\Delta < \frac{1}{2f_0} \tag{10—25}$$

即

$$f_0 < \frac{1}{2\Delta} \tag{10—26}$$

式中，f_0 为过程 $x(t)$中的最高频率成分，要由具体问题的物理性质或从记录曲线上估计；$\frac{1}{2\Delta}$称为奈奎斯特(Nyquist)频率，实用中可取 $\Delta=\frac{1}{4f_0}$或更小一些。Δ 取得过小，运算量增大，但实用效果提高得很有限；Δ 取得过大，将损失信息，还会产生所谓频率混叠现象[17]，使谱密度图形发生畸变，以致得不出正确的结果来。

在计算出各截口的均值和方差后，即可按式(10—12)和式(10—13)求自相关函数值。对

中心化后($m_x=0$)的平稳过程,式(10—12)和式(10—13)可简化为以下形式:

$$K_x(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[x_i(t)x_i(t+\tau)] \tag{10—27}$$

对得出的一系列离散的自相关函数值进行回归处理,近似地取作傅立叶变换的函数式,再通过傅立叶变换可以求得谱密度函数。对一些常见的典型随机过程的自相关函数和谱密度函数,可对照查表得出,其中一部分如表 10—4 所列。

也可根据对自相关函数的离散值 R_r 作离散傅立叶变换(DFT),以得出谱密度函数 $S_x(\omega)$,对应式(10—15)至(10—17)有

$$S_x(\omega)=\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}R_r e^{-i(2\pi kr/n)} \tag{10—28}$$

式中,$k=0,1,2,\cdots,n-1$。

式(10—28)只是计算谱密度的原始公式,实际计算时还要作一系列平滑处理,以提高其精确程度。有关现代谱分析方法的内容,读者可以参阅有关专著[17][24]。

由以上初步介绍可知,由自相关函数求谱密度,当样本数 N 及所取截口数 n 很大时,计算将很复杂,而且精度不高。但在 20 世纪 60 年代后期以前,这是计算谱密度的基本方法。在 1965 年出现快速傅立叶变换(FFT)的计算机算法以后,情况有了很大变化,它可直接从原始样本 $x(t)$ 的时间序列值计算谱密度,而且速度快,效果好。这样,就不必先求自相关函数,再求谱密度了。

二、直接按样本 $x(t)$ 的采样数据估计频谱

1. 概 述

对平稳过程,自相关函数为

$$K_x(\tau)=E[x(t)x(t+\tau)]$$

如时间区间取$(-T,T)$的形式,当 T 足够长乃至趋向∞时,$K_x(\tau)$可写成

$$K_x(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t$$

于是按式(10—14)有

$$\begin{aligned}
S_x(\omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t+\tau)\mathrm{d}t\right]e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau\\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4\pi T}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t+\tau)e^{-i\omega[(t+\tau)-t]}\mathrm{d}t\mathrm{d}\tau\\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4\pi T}\int_{-T}^{T}x(t)e^{i\omega t}\mathrm{d}t\int_{-T}^{T}x(t+\tau)e^{-i\omega(t+\tau)}\mathrm{d}(t+\tau)\\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4\pi T}[x(i\omega)x(-i\omega)]\\
&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4\pi T}|x(i\omega)|^2
\end{aligned} \tag{10—29}$$

根据前面对"1/(2π)"因子的说明,上式可简写为

$$S_x(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}|x(i\omega)|^2 \tag{10—30}$$

这说明谱密度函数 $S_x(\omega)$与平稳过程 $x(t)$的傅立叶变换 $x(i\omega)$之间存在有一定的关系。

实用中，我们可对 $x(t)$ 在足够长的时间范围内的有限个离散值 x_r(时间序列)取离散傅立叶变换，来计算频谱 X_k，X_k 为原始数据 $x_r(r=0,1,2,\cdots,n-1)$ 的离散傅立叶变换；k 为傅立叶变换的谐波级次($k=0,1,2,\cdots,n-1$)。

X_k 的表达式为

$$X_k=\frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}x_r e^{-\frac{i2\pi kr}{n}} \qquad (10—31)$$

式(10—30)及(10—31)为按样本 $x(t)$ 的采样数据直接估计频谱的原始计算式。

2. 快速傅立叶变换的基本原理[17]

快速傅立叶变换(FFT)是一种简捷的计算离散傅立叶变换的计算机算法，它对按样本 $x(t)$ 的原始数据直接计算频谱有很大的推动作用。

设一有限的数据序列 $x_r(r=0,1,2,\cdots,n-1)$，它的傅立叶变换如式(10—31)。

按常规计算，对 n 个 x_r 中的每一个，都要作 n 次 x_r 乘以 $e^{-i(2\pi kr/n)}$ 的运算，即总共要作 n^2 次复杂的乘法运算。而采用 FFT 则可使运算次数大大减少。

采用 FFT 计算，采样数据的数目应取 $n=2^p$，p 为正整数幂次。将原系列 x_r 按奇偶顺序分成两个相等的系列 y_r 与 z_r，使 $y_r=x_{2r}$，$z_r=x_{2r+1}(r=0,1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1)$，如图 10—13 所示，其离散傅立叶变换为

$$Y_k=\frac{1}{n/2}\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}-1}y_r e^{-i\frac{2\pi kr}{n/2}} \qquad (10—32)$$

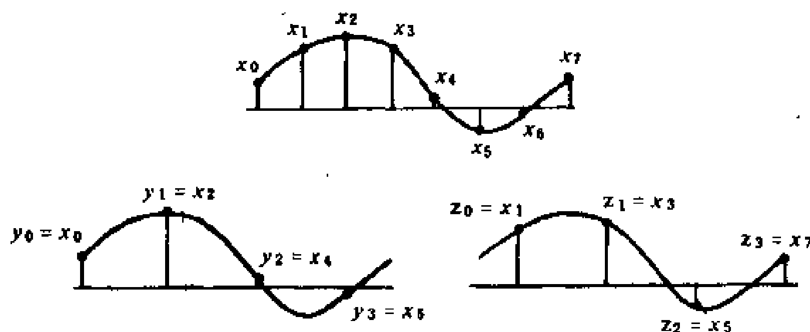


图 10—13

$$Z_k=\frac{1}{n/2}\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}-1}z_r e^{-i\frac{2\pi kr}{n/2}} \qquad (10—33)$$

式中，$k=0,1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1$。

将式(10—31)的奇数项和偶数项分开写成以下形式。即

$$\begin{aligned}X_k&=\frac{1}{n}\left[\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}-1}x_{2r}e^{-i\frac{2\pi k(2r)}{n}}+\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}-1}x_{2r+1}e^{-i\frac{2\pi k(2r+1)}{n}}\right]\\&=\frac{1}{n}\left[\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}-1}y_r e^{-i\frac{2\pi kr}{n/2}}+e^{-i\frac{2\pi k}{n}}\sum_{r=0}^{\frac{n}{2}-1}z_r e^{-i\frac{2\pi kr}{n/2}}\right]\\&=\frac{1}{2}\left[Y_k+Z_k e^{-i\frac{2\pi k}{n}}\right]\end{aligned} \qquad (10—34)$$

式(10—34)是 FFT 的关键所在。

由于采样数据的数目是 2^p,故可用同样的方法将两个半序列再分为 4 个、8 个、…,直至 2^p 个最简单的序列,即每个序列只有一项为止。

式(10—34)只能计算 k 在 $0\sim\frac{n}{2}-1$ 之间的 X_k 值,但考虑到导出离散傅立叶变换公式时所设定的原始数据的周期性,从而有

$$\left.\begin{aligned} Y_{k-\frac{n}{2}} &= Y_k \\ Z_{k-\frac{n}{2}} &= Z_k \end{aligned}\right\} \tag{10—35}$$

于是全面的计算公式为:

当 $k=0,1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1$ 时

$$X_k = \frac{1}{2}\left(Y_k + e^{-i\frac{2\pi k}{n}}Z_k\right) \tag{10—36}$$

当 $k=\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1,\cdots,n-1$ 时

$$X_k = \frac{1}{2}\left(Y_{k-\frac{n}{2}} + e^{-i\frac{2\pi k}{n}}Z_{k-\frac{n}{2}}\right) \tag{10—37}$$

如果设定 k 只从 0 变到$\frac{n}{2}$,则式(10—37)可写成

$$X_{k+\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\left[Y_k + e^{-i\frac{2\pi(k+\frac{n}{2})}{n}}Z_k\right]$$

由于 $e^{-i\pi}=-1$,故上式可简化为

$$X_{k+\frac{n}{2}} = \frac{1}{2}\left[Y_k - e^{-i\frac{2\pi k}{n}}Z_k\right] \tag{10—38}$$

设　$W=e^{-i\frac{2\pi}{n}}$

则式(10—37)和式(10—38)可写成

$$\left.\begin{aligned} X_k &= \frac{1}{2}\left[Y_k + W^kZ_k\right] \\ X_{k+\frac{n}{2}} &= \frac{1}{2}\left[Y_k - W^kZ_k\right] \end{aligned}\right\} \tag{10—39}$$

式中,$k=0,1,2,\cdots,\frac{n}{2}-1$。

这样计算,就不用 n^2 次乘法运算,而只要 $n\log_2 n$ 次就够了,运算次数可减小 $n/\log_2 n$ 倍,数据序列越长(n 越大),其提高效率的效果就越显著,许多计算机都配置有 FFT 计算的软件。

以下用一个最简单的 4 项序列$\{x_r\}$说明用 FFT 算法的逻辑步骤。

先将$\{x_r\}$4 项序列分成图 10—14 中所示的子序列,直到每个“四分之一”序列只有一项为止。即

$$X_k = \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1}x_r e^{-i(2\pi kr/n)} = x_0,(\text{当 } n=1, r=0 \text{ 及 } k=0)。$$

上式说明单项序列的 DFT 等于该项自身。然后按图 10—14 的下半部,分两步将各单项的 DFT 进行组合,就可以得出原始序列的 DFT。由图示可见,各单项序列的 DFT 分别为

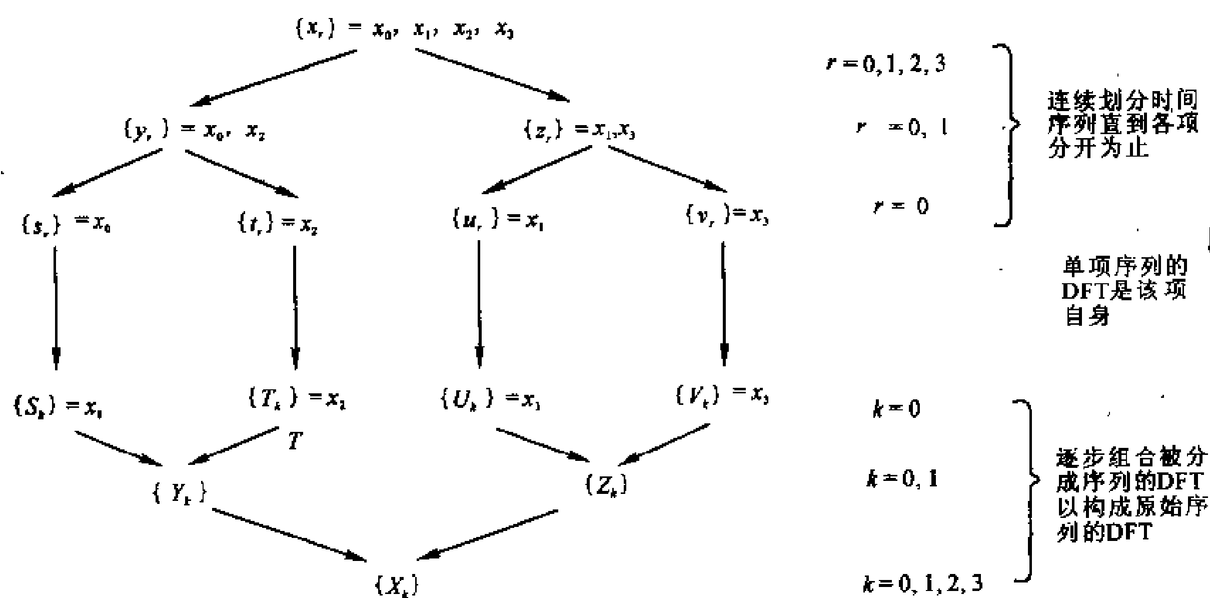


图 10—14

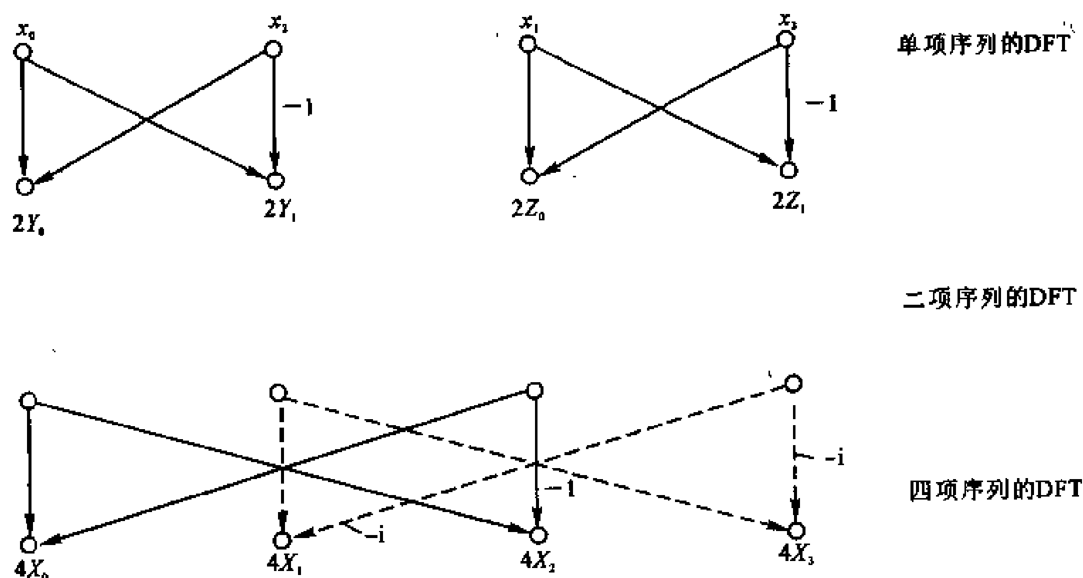


图 10—15

$\{S_k\} = x_0, \{T_k\} = x_2, \{U_k\} = x_1, \{V_k\} = x_3$

再按式(10—32),(10—33)组合得出 Y_k 和 Z_k。由于此时 $n/2 = 1, W = e^{-i(2\pi/n)} = e^{-i\pi} = -1$,故

$$\left.\begin{aligned} Y_0 &= \frac{1}{2}(x_0 + x_2) \qquad & Z_0 &= \frac{1}{2}(x_1 + x_3) \\ Y_1 &= \frac{1}{2}(x_0 - x_2) \qquad & Z_1 &= \frac{1}{2}(x_1 - x_3) \end{aligned}\right\} \tag{10—40}$$

再一次按式(10—31)组合，此时 $n=4, W=e^{-i(2\pi/n)}=e^{-i\pi/2}=-i$，因此，得

$$\left.\begin{aligned} X_0&=\frac{1}{4}(x_0+x_2+x_1+x_3)\\ X_1&=\frac{1}{4}\{x_0-x_2-i(x_1-x_3)\}\\ X_2&=\frac{1}{4}\{x_0+x_2-(x_1+x_3)\}\\ X_3&=\frac{1}{4}\{x_0-x_2-i(x_1-x_3)\}\end{aligned}\right\} \tag{10—41}$$

参照式(10—31)给出的 X_k 定义，不难验证，上式即为把 $\{x_r\}$ 的 4 个值代入式(10—31)所得的结果。

上述组合单项 DFT 以求取原始序列的 DFT 的步骤还可用“蝶形图”来表示，如图 10—15 所示。图中上面两个“蝴蝶”代表式(10—40)，它表明 4 个单项 DFTx_0, x_1, x_2, x_3 产生 $\{Y_k\}$ 与 $\{Z_k\}$。蝴蝶上每个节点代表一个变量，指向这个节点的箭头就表示组成该变量的分量，一般分量都是相加而组成该变量，有时在靠近箭头处标有一个因子，则表示相应的分量在相加前先乘以该因子，(例如因子为 -1 时即表示相减)。图 10—15 的下半部两个重叠的蝴蝶即表示按照式(10—41)由 $\{Y_k\}$ 与 $\{Z_k\}$ 产生原始序列的 DFT$\{X_k\}$。信号流程图的这种应用，将十分有助于编写适合于任意长度原始数据序列的 FFT 算法的逻辑步骤和程序设计流程图。

3. 数值算例

再举 $n=8$；即 $n=2^3$ 点 $\{x_r\}$ 的例子，进一步说明基数 2FFT 算法的步骤及其所需处理的问题。通常多用较直观的流程图来描述其计算过程，如图 10—16 所示，其左侧 3 列结点及连线表示 $n=8$ 点序列按偶、奇序数两步均分的结果。经此均分后次序与原序数不同，常称为乱序。均分后第三列的诸结点的单点 DFT 即为其自身。其右侧三列表示三步按式(10—39)进行组合。

本例中 $n=2^p=8$，即 $p=3$。将单因子指标 r 和 k 分别用 3 个因子 r_1, r_2, r_3 和 k_1, k_2, k_3 以二进制数表示为

$$r = r_1\times2^2+r_2\times2^1+r_3=(r_1,r_2,r_3)$$
$$k = k_3\times2^2+k_2\times2^1+k_1=(k_3,k_2,k_1)$$

上列各个因子的数值仅取为 0 或 1，它们对应的基底分别为 $2^2, 2^1$ 和 2^0。因此，由式(10—31)得

$$nX_k=\sum_{r=0}^{n-1}x_r e^{-i(2\pi kr/n)}$$

即 $8X(k)=\sum\limits_{r=0}^{7}x(r)W^{rk}=\sum\limits_{r_1=0}^{1}\sum\limits_{r_2=0}^{1}\sum\limits_{r_3=0}^{1}x(r_1,r_2,r_3)W^{rk}$

式中[21]：$W^{rk}=W^{(r_1\times2^2+r_2\times2+r_3)(k_3\times2^2+k_2\times2+k_1)}$

$\qquad =W^{(k_3,k_2,k_1)r_3+(k_2,k_1,0)r_2+(k_1,0,0)r_1}$

注意上式指数中圆括号内表示的是一个二进制数。

引入符号

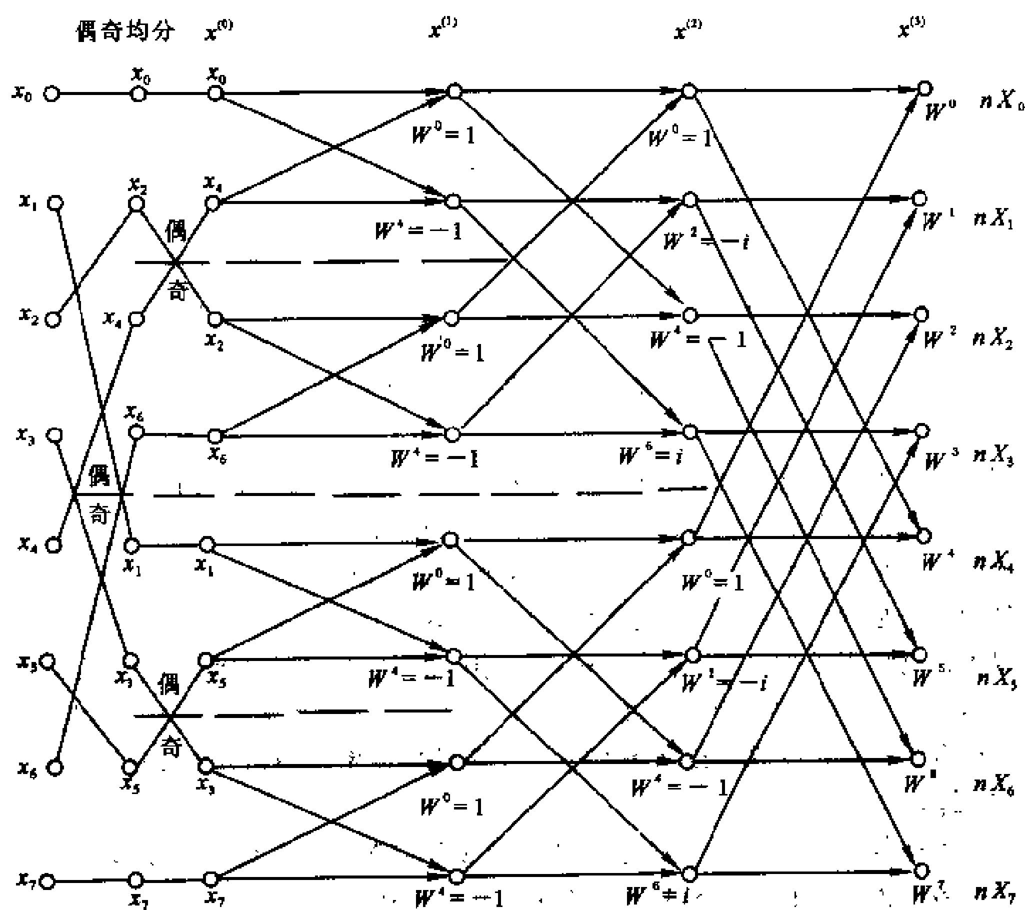


图 10—16

$$
\left.\begin{aligned}
x^{(0)}(r_1,r_2,r_3) &= x(r_1,r_2,r_3)\\
x^{(1)}(k_1,r_2,r_3) &= \sum_{r_1=0}^{1} x^0(r_1,r_2,r_3)W^{(k_1,0,0)r_1}\\
x^{(2)}(k_1,k_2,r_3) &= \sum_{r_2=0}^{1} x^{(1)}(k_1,r_2,r_3)W^{(k_2,k_1,0)r_2}\\
x^{(3)}(k_1,k_2,k_3) &= \sum_{r_3=0}^{1} x^{(2)}(k_1,k_2,r_3)W^{(k_3,k_2,k_1)r_3}
\end{aligned}\right\}\qquad(10\text{—}42)
$$

代入前式可得

$$n\cdot X(k) = n.X(k_3,k_2,k_1) = x^{(3)}(k_1,k_2,k_3)$$

为看清 FFT 的计算过程,今设已知时间序列$\{x_r\}$为 $x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7$,分步说明用 FFT 算法求 $X(k)$。另写时间序列$\{x_r\}$如下:

$$x^{(0)}(0,0,0) = x_0$$
$$x^{(0)}(0,0,1) = x_1$$
$$x^{(0)}(0,1,0) = x_2$$
$$x^{(0)}(0,1,1) = x_3$$
$$x^{(0)}(1,0,0) = x_4$$
$$x^{(0)}(1,0,1) = x_5$$

$$x^{(0)}(1,1,0) = x_6$$

$$x^{(0)}(1,1,1) = x_7$$

第一步，由式(10—42)：

$$x^{(1)}(k_1,r_2,r_3)=\sum_{r_1=0}^{1}x^{(0)}(r_1,r_2,r_3)W^{(k_1,0,0)r_1}$$

$$=x^{(0)}(0,r_2,r_3)+x^{(0)}(1,r_2,r_3)W^{(k_1,0,0)}$$

详细写为

当 $$k_1=0\begin{cases}x^{(1)}(0,0,0)=x^{(0)}(0,0,0)+x^{(0)}(1,0,0)\\x^{(1)}(0,0,1)=x^{(0)}(0,0,1)+x^{(0)}(1,0,1)\\x^{(1)}(0,1,0)=x^{(0)}(0,1,0)+x^{(0)}(1,1,0)\\x^{(1)}(0,1,1)=x^{(0)}(0,1,1)+x^{(0)}(1,1,1)\end{cases}$$

当 $$k_1=1\begin{cases}x^{(1)}(1,0,0)=x^{(0)}(0,0,0)+x^{(0)}(1,0,0)W^{(1,0,0)}\\x^{(1)}(1,0,1)=x^{(0)}(0,0,1)+x^{(0)}(1,0,1)W^{(1,0,0)}\\x^{(1)}(1,1,0)=x^{(0)}(0,1,0)+x^{(0)}(1,1,0)W^{(1,0,0)}\\x^{(1)}(1,1,1)=x^{(0)}(0,1,1)+x^{(0)}(1,1,1)W^{(1,0,0)}\end{cases}$$

第二步：

$$x^{(2)}(k_1,k_2,r_3)=\sum_{r_2=0}^{1}x^{(1)}(k_1,r_2,r_3)W^{(k_2,k_1,0)r_2}$$

$$=x^{(1)}(k_1,0,r_3)+x^{(1)}(k_1,1,r_3)W^{(k_2,k_1,0)}$$

详细写为

当 $$\begin{matrix}k_1=0\\k_2=0\end{matrix}\begin{cases}x^{(2)}(0,0,0)=x^{(1)}(0,0,0)+x^{(1)}(0,1,0)\\x^{(2)}(0,0,1)=x^{(1)}(0,0,1)+x^{(1)}(0,1,1)\end{cases}$$

$$\begin{matrix}k_1=0\\k_2=1\end{matrix}\begin{cases}x^{(2)}(0,1,0)=x^{(1)}(0,0,0)+x^{(1)}(0,1,0)W^{(1,0,0)}\\x^{(2)}(0,1,1)=x^{(1)}(0,0,1)+x^{(1)}(0,1,1)W^{(1,0,0)}\end{cases}$$

$$\begin{matrix}k_1=1\\k_2=0\end{matrix}\begin{cases}x^{(2)}(1,0,0)=x^{(1)}(1,0,0)+x^{(1)}(1,1,0)W^{(0,1,0)}\\x^{(2)}(1,0,1)=x^{(1)}(1,0,1)+x^{(1)}(1,1,1)W^{(0,1,0)}\end{cases}$$

$$\begin{matrix}k_1=1\\k_2=1\end{matrix}\begin{cases}x^{(2)}(1,1,0)=x^{(1)}(1,0,0)+x^{(1)}(1,1,0)W^{(1,1,0)}\\x^{(2)}(1,1,1)=x^{(1)}(1,0,1)+x^{(1)}(1,1,1)W^{(1,1,0)}\end{cases}$$

第三步：

$$x^{(3)}(k_1,k_2,k_3)=\sum_{r_3=0}^{1}x^{(2)}(k_1,k_2,r_3)W^{(k_3,k_2,k_1)r_3}$$

$$=x^{(2)}(k_1,k_2,0)+x^{(2)}(k_1,k_2,1)W^{(k_3,k_2,k_1)}$$

详细写为

$$\begin{cases}x^{(3)}(0,0,0)=x^{(2)}(0,0,0)+x^{(2)}(0,0,1)\\x^{(3)}(0,0,1)=x^{(2)}(0,0,0)+x^{(2)}(0,0,1)W^{(1,0,0)}\\x^{(3)}(0,1,0)=x^{(2)}(0,1,0)+x^{(2)}(0,1,1)W^{(0,1,0)}\\x^{(3)}(0,1,1)=x^{(2)}(0,1,0)+x^{(2)}(0,1,1)W^{(1,1,0)}\\x^{(3)}(1,0,0)=x^{(2)}(1,0,0)+x^{(2)}(1,0,1)W^{(0,0,1)}\\x^{(3)}(1,0,1)=x^{(2)}(1,0,0)+x^{(2)}(1,0,1)W^{(1,0,1)}\\x^{(3)}(1,1,0)=x^{(2)}(1,1,0)+x^{(2)}(1,1,1)W^{(0,1,1)}\\x^{(3)}(1,1,1)=x^{(2)}(1,1,0)+x^{(2)}(1,1,1)W^{(1,1,1)}\end{cases}$$

第四步：除 8，若有乱序情况，需纠正乱序(倒序)。

$$X(k_3,k_2,k_1) = x^{(3)}(k_1,k_2,k_3)/n$$

即

$$\begin{cases} X(0,0,0)=x^{(3)}(0,0,0)/8 \\ X(0,0,1)=x^{(3)}(1,0,0)/8 \\ X(0,1,0)=x^{(3)}(0,1,0)/8 \\ X(0,1,1)=x^{(3)}(1,1,0)/8 \\ X(1,0,0)=x^{(3)}(0,0,1)/8 \\ X(1,0,1)=x^{(3)}(1,0,1)/8 \\ X(1,1,0)=x^{(3)}(0,1,1)/8 \\ X(1,1,1)=x^{(3)}(1,1,1)/8 \end{cases}$$

例 10—5[2] 设已知时间序列 $x_0=1,x_1=2,x_2=3,x_3=4,x_4=5,x_5=6,x_6=7,x_7=8$，求谱 $X(k),k=0,1,2,\cdots,7$。

解： 本计算中，时间序列数 $n=8$，将周期函数 W_n^k 简写成 W^k：

$$W^k = e^{-i2\pi\frac{k}{n}} = \cos(2\pi\frac{k}{n}) - i\sin(2\pi\frac{k}{n})$$

当 $k=0,1,2,\cdots,7$ 时，可得

$$W^0=1$$

$$W^1=W^{\frac{\pi}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

$$W^2=W^{\frac{\pi}{4}}=-i$$

$$W^3=W^{\frac{3\pi}{8}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

而

$$W^4=-W^0=-1$$

$$W^5=-W^1=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

$$W^6=-W^2=i$$

$$W^7=-W^3=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$$

再将时间序列的序号，两次按偶奇均分后排列，其新的序号，正好为原序列序号按二进制数的倒码，即

000	001	010	011	100	101	110	111
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
000	100	010	110	001	101	011	111

故可得矩阵 $\mathbf{X}^{(0)}$，如图 10—16 中第 3 列所示。

$$\mathbf{X}^{(0)} = \begin{bmatrix} x^{(0)}(0,0,0) \\ x^{(0)}(1,0,0) \\ x^{(0)}(0,1,0) \\ x^{(0)}(1,1,0) \\ x^{(0)}(0,0,1) \\ x^{(0)}(1,0,1) \\ x^{(0)}(0,1,1) \\ x^{(0)}(1,1,1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_4 \\ x_2 \\ x_6 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_3 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

以下用矩阵进行逐步演算，计算时应参阅图 10—16 所列的流程，并应注意其 $x^{(0)}$，$x^{(2)}$是呈二进制数倒码形式进行排列的，故各节点的计算中，例如，第 7 行的节点：

$$x^{(2)}(0,1,1)=x^{(1)}(0,0,1)+x^{(1)}(0,1,1)W^4$$
$$=x^{(1)}(0,0,1)-x^{(1)}(0,1,1)$$

第 4 行的节点：

$$nX(0,1,1)=x^{(3)}(0,1,1)=x^{(2)}(1,1,0)+x^{(2)}(1,1,1)W^3$$

由第一次变换可得 $X^{(1)}$：

$$X^{(1)}=\begin{bmatrix}x^{(1)}(0,0,0)\\x^{(1)}(0,0,1)\\x^{(1)}(0,1,0)\\x^{(1)}(0,1,1)\\x^{(1)}(1,0,0)\\x^{(1)}(1,0,1)\\x^{(1)}(1,1,0)\\x^{(1)}(1,1,1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0\\1&-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&-1&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0&0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\5\\3\\7\\2\\6\\4\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\-4\\10\\-4\\8\\-4\\12\\-4\end{bmatrix}$$

第二次变换可得 $X^{(2)}$：

$$X^{(2)}=\begin{bmatrix}x^{(2)}(0,0,0)\\x^{(2)}(1,0,0)\\x^{(2)}(0,1,0)\\x^{(2)}(1,1,0)\\x^{(2)}(0,0,1)\\x^{(2)}(1,0,1)\\x^{(2)}(0,1,1)\\x^{(2)}(1,1,1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&-i&0&0&0&0\\1&0&-1&0&0&0&0&0\\0&1&0&i&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&-i\\0&0&0&0&1&0&-1&0\\0&0&0&0&0&1&0&i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\-4\\10\\-4\\8\\-4\\12\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\-4+i4\\-4\\-4-i4\\20\\-4+i4\\-4\\-4-i4\end{bmatrix}$$

第三次变换得 $X^{(3)}$：

$$X^{(3)}=\begin{bmatrix}x^{(3)}(0,0,0)\\x^{(3)}(0,0,1)\\x^{(3)}(0,1,0)\\x^{(3)}(0,1,1)\\x^{(3)}(1,0,0)\\x^{(3)}(1,0,1)\\x^{(3)}(1,1,0)\\x^{(3)}(1,1,1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&W^1&0&0\\0&0&1&0&0&0&-i&0\\0&0&0&1&0&0&0&W^3\\1&0&0&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&-W^1&0&0\\0&0&1&0&0&0&i&0\\0&0&0&1&0&0&0&-W^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}16\\-4+i4\\-4\\-4-i4\\20\\-4+i4\\-4\\-4-i4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}36\\-4+i(4+4\sqrt{2})\\-4+i4\\-4-i(4-4\sqrt{2})\\-4\\-4+i(4-4\sqrt{2})\\-4-i4\\-4-i(4+4\sqrt{2})\end{bmatrix}$$

以 $n=8$ 除上述结果，即可得频谱 X_k：

即

$$X(0)=4.5$$
$$X(1)=-0.5+i\,1.207$$
$$X(2)=-0.5+i\,0.5$$
$$X(3)=-0.5+i\,0.207$$
$$X(4)=-0.5$$
$$X(5)=-0.5+i\,0.207$$
$$X(6)=-0.5-i\,0.5$$
$$X(7)=-0.5-i\,1.207$$

这里需说明，时间序列 $\{x_r\}$ 经 FFT 运算，其结果序列号会呈二进制数的倒码形式排列，在本例中，因已将 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 排列成倒码形式，故其 $\boldsymbol{X}^{(1)}$，$\boldsymbol{X}^{(3)}$ 就会呈顺码形式排列；在本例的最后计算频谱中，只需将 $\boldsymbol{X}^{(3)}$ 除 8，已不必再进行倒序处理了。

这样由频谱分析的结果，就可以了解构成时域误差的频率情况，常数项（直流分量）和各次谐波信号的强度与位相，这将有助于分析和减弱平稳随机过程的误差源。

顺便说明，为避免繁琐的计算，这里仅列举了 $n=8$ 的 FFT 运算例子。用平稳随机过程 $X(t)$ 的某一次样本 $x(t)$ 做有限傅立叶变换得出的 X_k，实际上它是一个振幅谱，当然也具有各次谐波的相位信息，但它还不是谱密度。如需了解该过程的功率谱，只需将已得的结果，在具备相应软件的计算机上做处理〔参阅式(10—30)〕，就可以得出谱密度，同时也可以输出相应谱密度函数的图形。

附　　录

表 1　拉普拉斯函数表

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0.00	0.000 0	0.75	0.273 4	1.50	0.433 2	2.50	0.493 8
0.05	0.019 9	0.80	0.288 1	1.55	0.439 4	2.60	0.495 3
0.10	0.039 8	0.85	0.302 3	1.60	0.445 2	2.70	0.496 5
0.15	0.059 6	0.90	0.315 9	1.65	0.450 5	2.80	0.497 4
0.20	0.079 3	0.95	0.328 9	1.70	0.455 4	2.90	0.498 1
0.25	0.098 7	1.00	0.341 3	1.75	0.459 9	3.00	0.498 65
0.30	0.117 9	1.05	0.353 1	1.80	0.464 1	3.20	0.499 31
0.35	0.136 8	1.10	0.364 3	1.85	0.467 8	3.40	0.499 66
0.40	0.155 4	1.15	0.374 9	1.90	0.471 3	3.60	0.499 841
0.45	0.173 6	1.20	0.384 9	1.95	0.474 4	3.80	0.499 928
0.50	0.191 5	1.25	0.394 4	2.00	0.477 2	4.00	0.499 968
0.55	0.208 8	1.30	0.403 2	2.10	0.482 1	4.50	0.499 997
0.60	0.225 7	1.35	0.411 5	2.20	0.486 1	5.00	0.499 999 97
0.65	0.242 2	1.40	0.419 2	2.30	0.489 3		
0.70	0.258 0	1.45	0.426 5	2.40	0.491 8		

表 2　t 分布表

$p(|t| \geqslant t_\alpha) = \alpha$ 的 t_α 值

（ν:自由度　α:显著度）

ν	α			ν	α		
	0.05	0.01	0.0027		0.05	0.01	0.0027
1	12.71	63.66	235.80	20	2.09	2.85	3.42
2	4.30	9.92	19.21	21	2.08	2.83	3.40
3	3.18	5.84	9.21	22	2.07	2.82	3.38
4	2.78	4.60	6.62	23	2.07	2.81	3.36
5	2.57	4.03	5.51	24	2.06	2.80	3.34
6	2.45	3.71	4.90	25	2.06	2.79	3.33
7	2.36	3.50	4.53	26	2.06	2.78	3.32
8	2.31	3.36	4.28	27	2.05	2.77	3.30
9	2.26	3.25	4.09	28	2.05	2.76	3.29
10	2.23	3.17	3.96	29	2.05	2.76	3.28
11	2.20	3.11	3.85	30	2.04	2.75	3.27
12	2.18	3.05	3.76	40	2.02	2.70	3.20
13	2.16	3.01	3.69	50	2.01	2.68	3.16
14	2.14	2.98	3.64	60	2.00	2.66	3.13
15	2.13	2.95	3.59	70	1.99	2.65	3.11
16	2.12	2.92	3.54	80	1.99	2.64	3.10
17	2.11	2.90	3.51	90	1.99	2.63	3.09
18	2.10	2.88	3.48	100	1.98	2.63	3.08
19	2.09	2.86	3.45	∞	1.96	2.58	3.00

表3　χ^2 分布表

$p(\chi^2 \geqslant \chi_\alpha^2) = \alpha$ 的 χ^2 值

（ν：自由度　α：置信度）

ν	α				ν	α			
	0.1	0.02	0.05	0.01		0.1	0.02	0.05	0.01
1	2.71	5.41	3.84	6.64	16	23.54	29.63	26.30	32.00
2	4.61	7.82	5.99	9.21	17	24.77	31.00	27.59	33.41
3	6.25	9.84	7.82	11.34	18	25.99	32.35	28.87	34.81
4	7.78	11.67	9.49	13.28	19	27.20	33.69	30.14	36.19
5	9.24	13.39	11.07	15.09	20	28.41	35.02	31.41	37.57
6	10.61	15.03	12.59	16.81	21	29.62	36.34	32.67	38.93
7	12.02	16.62	14.07	18.48	22	30.81	37.66	33.92	40.29
8	13.36	18.17	15.51	20.09	23	32.00	38.97	35.17	41.64
9	14.68	19.68	16.92	21.67	24	33.20	40.27	36.42	42.98
10	15.99	21.16	18.31	23.21	25	34.38	41.57	37.65	44.31
11	17.28	22.62	19.68	24.73	26	35.56	42.86	38.89	45.64
12	18.55	24.05	21.03	26.22	27	36.71	44.14	40.11	46.96
13	19.81	25.47	22.36	27.69	28	37.92	45.42	41.34	48.28
14	20.06	26.87	23.69	29.14	29	39.09	46.70	42.56	49.59
15	22.31	28.26	25.00	30.58	30	40.26	47.96	43.77	50.89

表4　F 分布表(1)

$\alpha = 0.10$

ν_2	ν_1									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	59.44	60.70	62.00	63.33
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.37	9.41	9.45	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.25	5.22	5.18	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.95	3.90	3.83	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.34	3.27	3.19	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	2.98	2.90	2.82	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.75	2.67	2.58	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.59	2.50	2.40	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.47	2.38	2.28	2.16
10	3.28	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.38	2.28	2.18	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.30	2.21	2.10	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.24	2.15	2.04	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.20	2.10	1.98	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.15	2.05	1.94	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.12	2.02	1.90	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.09	1.99	1.87	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.06	1.96	1.84	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.04	1.93	1.80	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.02	1.91	1.79	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.00	1.89	1.77	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	1.98	1.88	1.75	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	1.97	1.86	1.73	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.95	1.84	1.72	1.55

ν_2	ν_1									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.94	1.83	1.70	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.93	1.82	1.69	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.92	1.81	1.68	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.91	1.80	1.67	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.90	1.79	1.66	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.89	1.78	1.65	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.88	1.77	1.64	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.83	1.71	1.57	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.77	1.66	1.51	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.72	1.60	1.45	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.67	1.55	1.38	1.00

表 4 *F* 分布表(2)

$\alpha = 0.05$

ν_2	ν_1									
	1	2	3	4	5	6	8	12	14	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	238.9	243.9	249.0	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.41	19.45	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.84	8.74	8.64	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	5.91	5.77	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.82	4.68	4.53	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.15	4.00	3.84	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.73	3.57	3.41	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.44	3.28	3.12	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.07	2.90	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.07	2.91	2.74	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	2.95	2.79	2.61	2.40
12	4.75	3.88	3.49	3.26	3.11	3.00	2.85	2.69	2.50	2.30
13	4.67	3.80	3.41	3.18	3.02	2.92	2.77	2.60	2.42	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.70	2.53	2.35	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.64	2.48	2.29	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.59	2.42	2.24	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.55	2.38	2.19	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.51	2.34	2.15	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.48	2.31	2.11	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.45	2.28	2.08	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.42	2.25	2.05	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.40	2.23	2.03	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.38	2.20	2.00	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.36	2.18	1.98	1.73
25	4.24	3.38	2.99	2.76	2.60	2.49	2.34	2.16	1.96	1.71
26	4.22	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.32	2.15	1.95	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.30	2.13	1.93	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.44	2.29	2.12	1.91	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.54	2.43	2.28	2.10	1.90	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.27	2.09	1.89	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.18	2.00	1.79	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.52	2.37	2.25	2.10	1.92	1.70	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.02	1.83	1.61	1.25
∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.10	1.94	1.75	1.52	1.00

表4 F分布表(3)

$\alpha = 0.01$

ν_2	ν_1									
	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5982	6106	6234	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.37	99.42	99.46	99.50
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.49	27.05	26.60	26.12
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.80	14.37	13.93	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.29	9.89	9.47	9.02
6	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.10	7.72	7.31	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.84	6.47	6.07	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.03	5.67	5.28	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.47	5.11	4.73	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.06	4.71	4.33	3.91
11	9.65	7.20	6.22	5.67	5.32	5.07	4.74	4.40	4.02	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.50	4.16	3.78	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.20	4.86	4.62	4.30	3.96	3.59	3.16
14	8.86	6.51	5.56	5.03	4.69	4.46	4.14	3.80	3.43	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.00	3.67	3.29	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	3.89	3.55	3.18	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.79	3.45	3.08	2.65
18	8.28	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.71	3.37	3.00	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.63	3.30	2.92	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.56	3.23	2.86	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.51	3.17	2.80	2.36
22	7.94	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.45	3.12	2.75	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.41	3.07	2.70	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.36	3.03	2.66	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.32	2.99	2.62	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.29	2.96	2.58	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.26	2.93	2.55	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.23	2.90	2.52	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.20	2.87	2.49	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.17	2.84	2.47	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	2.99	2.66	2.29	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.82	2.50	2.12	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.66	2.34	1.95	1.38
∞	6.64	4.60	3.78	3.32	3.02	2.80	2.51	2.18	1.79	1.00

参 考 文 献

〔1〕张世箕编著．测量误差及数据处理．北京:科学出版社,1979
〔2〕肖明耀著．误差理论与应用．北京:中国计量出版社,1985
〔3〕张世英、刘智敏编著．测量实践与数据处理．北京:科学出版社,1977
〔4〕费业泰主编．误差理论与数据处理(第4版)．北京:机械工业出版社,2000
〔5〕罗南星编著．测量误差及数据处理．北京:中国计量出版社,1984
〔6〕张启人著．测定值计算基础．北京:科学出版社,1965
〔7〕冯师颜编．误差理论与实验数据处理．北京:科学出版社,1964
〔8〕中国科学院数学研究所数理统计组编．回归分析方法．北京:科学出版社,1975
〔9〕上海师范大学概率统计组编．回归分析及其实验设计．上海:上海教育出版社,1978
〔10〕复旦大学．概率论与数理统计．上海:上海科技出版社,1978
〔11〕浙江大学．概率论与数理统计．北京:人民教育出版社,1979
〔12〕梁晋文主编．几何量实用测试手册．北京:机械工业出版社,1985
〔13〕〔苏〕E.C. 温特切勒著．崔明奇等译．概率论．上海:上海科技出版社,1961
〔14〕〔苏〕П.И. 希洛夫著．朱新美等译．最小二乘法,北京:测绘出版社,1959
〔15〕М.Ф.Маликов,Основы Метрологии,Коммерприбор 1944
〔16〕В.П.Коротков и Б.А.Тайц, Основы Метрологии и Точности Механизмов приборов, Машгиз,1961
〔17〕〔英〕D.E. 纽兰著．方同等译．随机振动与谱分析概论．北京:机械工业出版社,1980
〔18〕〔美〕J.S. 贝达特、A.G. 皮尔索著．凌福根译．随机数据分析方法．北京:国防工业出版社,1976
〔19〕〔瑞典〕H. 克拉美著．魏宗舒等译．统计学数学方法．上海:上海科技出版社,1966
〔20〕Chaitterjee Samprit and Price Bertran, Regression by Example, New York, Wiley, 1977
〔21〕〔美〕E.O. 布赖姆著．柳群译．快速傅里叶变换．上海:上海科技出版社,1979
〔22〕国家质量技术监督局计量司组编．通用计量术语及定义解释．北京:中国计量出版社,2001
〔23〕国家质量技术监督局计量司组编．测量不确定度评定与表示指南．北京:中国计量出版社,2000
〔24〕林洪桦编著．动态测试数据处理．北京:北京理工大学出版社,1995